

DER
PHYSIK UND CHEMIE.

NEUE FOLGE. BAND 54.

1. *Ueber die Selbstinduction und electrostatische Capacität von Drahtrollen und ihren Einfluss auf magnetische Erscheinungen;*
von Carl Fromme.

§ 1. Wenn man parallel zur Unterbrechungsstelle eines magnetisirenden Stromkreises einen Widerstand schaltet, durch welchen nach Oeffnung des Unterbrechers der Extrastrom der Spiralen seinen Weg nehmen kann, so variiert das noch übrig bleibende temporäre und das resultirende permanente Moment nach Grösse und Zustand nicht nur mit der *Grösse* des Widerstandes, sondern hängt auch von seiner *Beschaffenheit* in hohem Grade ab.¹⁾

Es erweisen sich sowohl seine Selbstinduction als seine electrostatische Capacität von erheblichem Einfluss; das Verhalten Siemens'scher Rheostatenwiderstände lässt auf das Vorhandensein einer bedeutenden Capacität bei den grösseren derselben schliessen, wohingegen den nach Chaperon'schem Verfahren gewickelten Rollen die kleinste Selbstinduction und electrostatische Capacität zukommen muss.

In der vorliegenden Arbeit wird die Untersuchung der Eigenschaften von Drahtrollen auf Grund magnetischer Erscheinungen in folgender Weise fortgesetzt: Der Platinunterbrecher des magnetisirenden Stromkreises ist mit den Belegungen eines Siemens'- und Halske'schen Glimmercondensators von 0,1 bis in Summa 1,0 Mikrofarad durch einen Siemens'schen Rheostat von im ganzen 10000 S. E. oder eine oder mehrere andere Drahtrollen verbunden. Mit Oeffnung des Unterbrechers verschwindet dann der temporäre Magnetismus des in der Magnetisierungsspirale befindlichen

1) C. Fromme, Wied. Ann. 53. p. 236. 1894.

Versuchskörpers, der Extrastrom fliesst zum Theil den Belegungen des Condensators zu, zum Theil gleicht er sich im Funken an der Unterbrechungsstelle aus.

Die electromotorische Kraft lieferten fünf Bunsen'sche Elemente. Jeder Versuch begann damit, dass das maximale permanente Moment PM_{Max} hergestellt wurde, indem man den Strom ohne Rheostatenwiderstand schloss und dann langsam Flüssigkeitswiderstand bis zum fast völligen Verschwinden des temporären Moments zuschaltete. Darauf wurde der Strom wieder geschlossen, eventuell nachdem in der Stromleitung Rheostatenwiderstand eingeschaltet war, und dann, nachdem man die Condensatorleitung mit dem Unterbrecher verbunden hatte, unterbrochen. Zu den Versuchen dienten die beiden Drahtbündel, der Eisen- und der Stahlstab der vorigen Untersuchung. Die Capacität des Condensators beträgt 0,5 Mikrofar., wenn keine gegentheilige Angabe gemacht ist.

§ 2. Zunächst möge die Intensität des magnetisirenden Stromes variiert werden durch Einschaltung von Siemens'schen Rheostatenwiderständen in die Stromleitung, während die Condensatorleitung keinen Widerstand enthält.

Tabelle 1.

Drahtbündel in Paraffin. $PM_{\text{Max}} = 908$. Es sind auch correspondirende Beobachtungen ohne angelegten Condensator angestellt.

In der Stromleitung $W =$	Abnahme des PM_{Max}		In der Stromleitung $W =$	Abnahme des PM_{Max}	
	Ohne Cond.	Mit Cond.		Ohne Cond.	Mit Cond.
0	130	893	70	19	274
2	128	890	80	16	219
4	126	879	100	44	148
6	126	868	120	26	96
8	128	881	140	35	69
10	130	872	170	9	34
13	126	853	200	23	15
16	121	831	240	21	8
20	111	802	270	19	5
24	84	764	300	20	4
27	60	726	340	11	1
36	38	683	400	12	1
40	12	543	500	12	3
50	17	427	700	7	2
60	30	289	900	4	2

Wenn der Condensator nicht angelegt ist, so verläuft $\delta.PM$, die Abnahme des PM_{Max} , in der aus den früheren Abhandlungen bekannten Weise. Nach Zuschaltung des Condensators setzt $\delta.PM$ bei kleinen Widerständen in der Stromleitung mit hohen Werthen ein — es verschwinden 98 Proc. des PM_{Max} — und nimmt mit zunehmendem Widerstand zuerst langsam, dann rascher ab. Bis $W = 200$ übersteigt die Abnahme mit Condensator erheblich diejenige ohne Condensator, bei grösseren Widerständen tritt das umgekehrte Verhalten ein. Bei $W = 0$ unterbrach ich, statt wie gewöhnlich zwischen Platinflächen, in einigen Versuchen auch zwischen Quecksilber und Kupfer, ohne dass hierdurch der grosse Werth von $\delta.PM$ eine Aenderung erfahren hätte. Dass die Art der Unterbrechung gleichgültig ist, erklärt sich daraus, dass sich in keinem Falle ein Funken bildete. Der Extrastrom floss also vollständig dem Condensator zu, der sich dann rückwärts durch die Spiralen entlud. Daher die grossen Werthe von $\delta.PM$ bei nicht zu kleiner Stromstärke und Zuschaltung des Condensators. Dass bei den kleinsten Stromstärken der Condensator umgekehrt den Werth von $\delta.PM$ herabsetzt, dürfte darin seine Begründung finden, dass die angehängte Capacität dem Extrastrom einen ruhigen Ablauf ermöglicht, während sich sonst seine Electricität an der Unterbrechungsstelle mit grösserer Dichte ansammelt, und da der Potentialunterschied zur Funkenbildung nicht genügt, sich rückwärts in Schwingungen entlädt.

Bei den folgenden Versuchen ist die Intensität des magnetisirenden Stromes immer die gleiche maximale ($W = 0$ im Rheostaten), dagegen enthält die Condensatorzuleitung variablen Rheostatenwiderstand (Tab. 2 auf der folg. Seite).

An der Unterbrechungsstelle trat nur, solange $W < 30$ war, kein Funken auf. Bei grösseren Widerständen gleicht sich ein mit dem Widerstand wachsender Theil des Extrastromes direct aus unter Vermeidung des Condensators. Mit zunehmendem Widerstand der Condensatorleitung bleibt demnach $\delta.PM$ zuerst constant und nimmt dann ein wenig ab bis $W = 18$. Es wächst wieder, erreicht einen grösssten, den bei $W = 0$ übersteigenden Werth bei $W = 30$ und nimmt wiederum ab bis zu einem Minimum, welches bei $W = 70$

liegt und tiefer ist, als das erste. Nochmals erfolgt ein Ansteigen von $\delta.PM$, jetzt bis zu einem sehr hohen Maximum bei $W=160$, und daran schliesst sich eine bis zu den grössten Widerständen sich erstreckende Abnahme, welche vollkommen regelmässig verläuft, wenn man nur die Rheostatenwiderstände möglichst getheilt anwendet und namentlich vermeidet, einen der ungetheilten Widerstände 500, 1000, 2000 oder 5000 allein oder zusammen mit einem im Verhältniss zu ihnen kleinen Widerstände einzuschalten. Denn es fällt $\delta.PM$ dann stets zu gross aus: bei den eben genannten ungetheilten Widerständen ist $\delta.PM$ so gross, wie bei den vielfach getheilten kleineren 450, 950, 1300, 1100.

Tabelle 2.
Drahtbündel in Paraffin. $PM_{\text{Max}} = 890$.

Widerstand im Cond.- Zweig	$\delta.PM$	Widerstand im Cond.- Zweig	$\delta.PM$	Widerstand im Cond.- Zweig	$\delta.PM$
0	880	180	1186	1100	220
2	879	200	1210	1200	198
4	882	230	1080	1300	184
6	880	260	951	1500	164
8	878	300	921	1700	149
10	877	350	810	1900	142
12	877	400	684	2000	137
15	875	450	584	(getheilt)	
18	875	500	504	1000 + 1000	142
21	889	(getheilt)		2000	186
25	901	500	585	(in 1 Stück)	
30	911	(in 1 Stück)		5000	125
35	895	550	504	(getheilt)	
40	876	600	450	5000	220
45	838	650	404	(in 1 Stück)	
50	830	700	361	5100	204
60	825	750	333	6000	151
70	825	800	304	(= 5000 + 1000)	
80	842	850	280	7000	142
90	981	900	261	(= 5000 + 1000)	
100	1004	950	246	+ 1000)	
120	1149	1000	228	7000	155
140	1235	(getheilt)		(= 5000 + 2000)	
160	1268	1000	247	∞	130
		(in 1 Stück)			

Die Gleichheit von $\delta.PM$ z. B. für $W=5000$ (ungetheilt) und $W=1100$ (getheilt) gilt jedoch nur für eine bestimmte

Stärke des magnetisirenden Stromes. Schaltete man $W=20$ in den Stromkreis ein, so war $\delta.PM=107$, wenn $W=5000$, dagegen $\delta.PM=34$, wenn $W=1100$ sich im Condensatorzweig befand. Vgl. auch § 8, Tab. 17.

§ 3. Das Ausnahmeverhalten der grösseren ungetheilten Widerstände 500, 1000, 2000 und 5000 war nach den in der vorhergehenden Untersuchung gemachten Erfahrungen nicht auffallend. Dagegen war es ja denkbar, dass die Maxima und Minima von $\delta.PM$ in Tab. 2 mit der Construction des Rheostaten und der Wickelung seiner Widerstände zusammenhingen. Um diesen Einwurf zu widerlegen, wurde statt des Rheostaten ein geradliniger Flüssigkeitswiderstand von variabler Länge in den Condensatorzweig eingeführt.

Tabelle 2.

Drahtbündel in Paraffin. $PM_{\text{Max}} = 910$.

Widerstand im Cond.- Zweig	$\delta.PM$	Widerstand im Cond.- Zweig	$\delta.PM$
220			
198	0	883	220
184	44	885	264
164	88	885	308
149	132	1010	352
142	176	1170	440
137			

Wenn also auch der grossen Widerstandsintervalle wegen die beiden Minima und das erste Maximum hier nicht zu bemerken sind, so beweist doch wohl das Auftreten des zweiten, höheren Maximums, dass das Auf- und Abschwanken von $\delta.PM$ in Tab. 2 von der Rheostatenconstruction unabhängig war. Die Erklärung der Maxima und Minima ergibt sich dann aus folgender Ueberlegung. Wenn man den Platinunterbrecher öffnet, so fliest der Extrastrom zum Theil den Belegungen des Condensators zu, zum Theil nimmt er seinen Weg durch den Unterbrecher. Der letztere Theil war jedoch gleich Null, solange der Widerstand im Condensatorzweig weniger als 30 S.-E. betrug, denn erst bei $W > 30$ wurde ein Funken beobachtet. Der condensirte Theil des Extrastromes entlädt sich nun rückwärts durch die Spiralen in electrischen Schwingungen, solange wenigstens kein zu grosser Widerstand im Condensator-

zweige sich befindet. Wird ein gewisser Widerstand überschritten, so ist die Entladung einfach, nicht oscillirend, und es nimmt dann mit zunehmendem Widerstand $\delta.PM$ continuirlich ab, weil die Intensität dieses Entladungsstromes abnimmt. Das tritt vom zweiten Maximum an ein ($W=160$ in Tab. 2). Bei Widerständen kleiner als 160 treten dagegen noch Oscillationen auf, nämlich vom zweiten Minimum ($W=70$) bis zum zweiten Maximum eine — nennen wir sie die erste —, welche also nach den Condensatorbelegungen hin gerichtet ist, daher magnetisirend wirkt, und deren mit zunehmendem Widerstand wachsende Dämpfung das Anwachsen von $\delta.PM$ bis zum zweiten Maximum verursacht. Beim ersten Maximum ($W=30$) schliesst die Reihe der Oscillationen mit der zweiten, vom Condensator fortgerichteten, also entmagnetisirend wirkenden, welche mit bis $W=70$ wachsendem Widerstand vollständig gedämpft ist, wodurch sich die Abnahme von $\delta.PM$ zwischen diesen Widerständen erklärt. Beim ersten Minimum ($W=18$) würden drei Oscillationen wirksam sein und bei $W=0$ vier.

Auf diese Weise lässt sich also das Auf- und Abschwanken von $\delta.PM$ in Tab. 2 vollkommen erklären. Aus der raschen Abnahme der Intensität der Oscillationen mit wachsender Ordnungszahl ergiebt sich auch, dass das zweite Minimum von $\delta.PM$ niedriger sein muss, als das erste, und das zweite Maximum höher als das erste Maximum.

§ 4. Durch das schnelle Verschwinden des inducirten Magnetismus bei einem Drahtbündel und den dadurch bedingten raschen Ablauf des Extrastromes wird das Entstehen electrischer Oscillationen wahrscheinlich begünstigt. Um den Ablauf des Extrastromes zu verzögern, umgab ich das Drahtbündel mit einer Messingröhre. War dieselbe geschlossen, so ergab sich — bei $W=0$ im Condensatorzweig — $\delta.PM$ verschwindend klein, ebenso wie ohne Zuschaltung des Condensators. Am Platinunterbrecher sprang nun ein Funken über¹⁾,

1) Bei der Untersuchung eines Stahlstabes trat stets ein Funke am Unterbrecher auf, wenn sich auch kein Widerstand im Condensatorzweig befand und die Capacität des Condensators 0,1 bis 1,0 Mikrofar. betrug.

als Beweis, dass jetzt ein Theil des Extrastromes durch die Unterbrechungsstelle ging; dass dies der überwiegende Theil war, geht aus dem sehr kleinen Werthe von $\delta.PM$ hervor. Von dem jetzt mit durchschnittlich viel kleinerer electro-motorischer Kraft ablaufenden Extrastrom vermag der Condensator nur einen kleinen Theil aufzuspeichern; der grösste muss sich deshalb im Funken ausgleichen. Wurde dagegen, um das Verschwinden des Magnetismus weniger stark zu verzögern, die Röhre der Länge nach aufgeschlitzt, so ergaben sich folgende Resultate:

Tabelle 4.

Drahtbündel in Paraffin. $PM_{\text{Max}} = 910$.Variabler Widerstand W im Condensatorzweig.

W	$\delta.PM$	W	$\delta.PM$	W	$\delta.PM$	W	$\delta.PM$	W	$\delta.PM$
0	895	21	895	60	877	230	782	1000 (in 1 St.)	133
4	895	25	890	70	913	260	697	2000 (geth.)	77
8	894	30	877	80	955	400	406	2000 (in 1 St.)	93
12	895	35	868	90	990	500 (geth.)	266	5000 (geth.)	64
15	895	40	862	170	997	500 (in 1 St.)	318	5000 (in 1 St.)	87
18	895	50	855	200	930	1000 (geth.)	123	∞	66

Die durch die aufgeschlitzte Röhre hervorgebrachte Verzögerung im Ablauf des Extrastromes bewirkt also, dass das erste Minimum und das erste Maximum verschwinden, dass das zweite Minimum weniger tief und das zweite Maximum weniger hoch ist — beide haben ihre Lage etwa beibehalten — und dass die Werthe von $\delta.PM$ nach dem zweiten Maximum erheblich kleiner sind, während bei kleinen Widerständen die $\delta.PM$ denjenigen in Tab. 2 vollkommen entsprechen. Gleich grosse Widerstände in verschiedener Zusammensetzung verursachen aber auch jetzt noch verschiedene $\delta.PM$.

Damit ist erwiesen, dass die Geschwindigkeit, mit welcher der Magnetismus verschwindet, auf die Bildung der Maxima und Minima von $\delta.PM$ von Einfluss ist. Weitere Versuche hierüber vgl. in § 7, Tab. 13.

Das langsame Verschwinden des induciren Magnetismus bei Stäben ist vielleicht auch der alleinige Grund für das Fehlen der Maxima und Minima bei den folgenden Versuchen.

Tabelle 5.

Stahlstab, Länge = 15 cm, Dicke = 0,6 cm. $P M_{\text{Max}} = 936$.
Variabler Widerstand W im Condensatorzweig.

W	$\delta.PM$	W	$\delta.PM$	W	$\delta.PM$	W	$\delta.PM$	W	$\delta.PM$
0	387	12	346	40	310	140	234	400	195
2	365	15	343	50	296	170	223	500 (geth.)	186
4	361	18	337	60	278	200	222	2000 (geth.)	175
6	359	21	332	70	278	240	209	2000 (in 1 St.)	181
8	352	25	330	90	257	280	203	5000 (geth.)	173
10	348	30	322	110	250	330	202	5000 (in 1 St.)	178
								Ohne Cond.	164

Auch bei dem Stahlstab erhöht also die Anlegung des Condensators das $\delta.PM$ zwar erheblich, doch nimmt $\delta.PM$ mit wachsendem Widerstand continuirlich ab. Vgl. jedoch auch die Beobachtungen mit dem Stahlstab in § 8.

Die ungetheilten Widerstände 2000 und 5000 geben aber auch hier ein freilich nur wenig grösseres $\delta.PM$ als die getheilten.

Sehr gering ist der Einfluss des Condensators bei einem Eisenstab.

Tabelle 6.

Eisenstab, Länge = 17 cm, Dicke = 0,6 cm. $P M_{\text{Max}} = 725$.
Variabler Widerstand W im Condensatorzweig

W	$\delta.PM$	W	$\delta.PM$
0	356	400	326
10	337	700	320
20	331	1000 in	323
40	322	2000 einem	321
80	317	5000 Stück	320
200	321	∞	320

Einen grösseren Werth von $\delta.PM$ erzielt man also durch Zuschaltung des Condensators nur dann, wenn der Widerstand im Condensatorzweig kleiner als 40 ist. Bei grösseren Widerständen gleicht sich jedenfalls beinahe der ganze Extrastrom im Funken aus.

§ 5. Bei den bisher beschriebenen Versuchen wurde stets die gleiche Capacität von 0,5 Mikrofar. gebraucht. Es war aber mit Rücksicht auf die Frage, weshalb und in welcher Weise die electrostatische Capacität der in den Condensator-

zweig geschalteten Widerstände die Erscheinungen beeinflusst, von Wichtigkeit, die Capacität des Condensators zu variiren.

Tabelle 7.

Drahtbündel in Paraffin. $P M_{\text{Max}} = 906$. In der Stromleitung $W = 0$.

Capacität des Condensators	Widerstand im Condensatorzweig						
	$W = 0$ $\delta. PM$	$W = 10$ $\delta. PM$	$W = 20$ $\delta. PM$	$W = 40$ $\delta. PM$	$W = 70$ $\delta. PM$	$W = 120$ $\delta. PM$	$W = 200$ $\delta. PM$
0,1	878	764	708				
	825	836	638	852	844	846	1012
	861	886	738				
		844					
0,2	884	852					
		890	896	891	836	901	1120
		799					
0,3	886	887	896	882	825	966	1144
0,4	887	878	896	882	824	1043	1175
0,5	887	887	897	880	848	1051	1133
0,6	888	887	897	871	840	1126	1109
0,7	888	887	901	853	856	1180	1080
0,8	889	887	903	847	921	1185	1066
0,9	887	887	899	838	934	1199	1006
1,0	891	892	906	832	933	1213	958

Bei der folgenden Beobachtungsreihe wurden grössere Rheostatenwiderstände eingeschaltet. $P M_{\text{Max}} = 923$.

Capacität	Widerstand im Condensatorzweig						
	$W = 50$ $\delta. PM$	$W = 100$ $\delta. PM$	$W = 200$ $\delta. PM$	$W = 350$ $\delta. PM$	$W = 500$ (in 1 St.) $\delta. PM$	$W = 1000$ $\delta. PM$	$W = 2000$ (in 1 St.) $\delta. PM$
0,1	878	891	890	980	844	384	291
0,2	908	849	1127	990	769	324	237
0,3	897	880	1157	931	657	265	209
0,4	873	908	1232	823	606	233	190
0,5	875	954	1147	778	526	208	175
0,6	850	1000	1146	726	479	189	162
0,7	846	1030	1166	667	447	175	170
0,8	839	—	1056	631	399	163	175
0,9	835	—	1071	574	374	154	147
1,0	828	1148	986	552	352	145	144

Die angegebenen $\delta. PM$ sind grössttentheils die Mittelwerthe aus zwei oder drei Beobachtungen. Wo dieselben nicht befriedigend übereinstimmten, habe ich die Einzelwerthe angeführt. Das ist der Fall bei der Capacität 0,1 Mikrofar. und

kleinen Widerständen, einmal auch bei 0,2 Mikrofar. Sieht man von diesen kleinsten Capacitäten ab, so kann man behaupten, dass bei Widerständen von $W = 0$ bis $W = 20$ im Condensatorzweig $\delta.PM$ mit der Capacität sich nicht ändert. Bei Widerständen grösser als $W = 350$ nimmt $\delta.PM$ mit wachsender Capacität continuirlich ab. Bei Widerständen von $W = 40$ bis $W = 200$ ändert sich $\delta.PM$ sowohl im Sinne einer Abnahme als einer Zunahme; der nächste Grund hierfür liegt in den bei constanter Capacität mit sich änderndem Widerstand auftretenden Maximis und Minimis, die, wie eine Betrachtung der Horizontalreihen zeigt, nicht nur bei 0,5 Mikrofar., sondern bei jeder Capacität auftreten und ihre Lage ändern mit sich ändernder Capacität. Für das zweite Minimum und das zweite Maximum ist das deutlich zu sehen, sie rücken mit wachsender Capacität beide nach kleineren Widerständen. Betrachtet man, wie es in § 3 geschehen ist, den Widerstand, bei dem das zweite Maximum eintritt, als denjenigen, von welchem an die Electricitätsbewegung den oscillatorischen Character verliert, so ist die Abnahme dieses Widerstandes mit wachsender Capacität theoretisch verständlich. Denn nach der Theorie stehen diese kritischen Widerstände im umgekehrten Verhältniss der Quadratwurzeln aus den Capacitäten. Soweit die wenig genaue Festlegung der betreffenden Widerstände beurtheilen lässt, ist auch quantitative Uebereinstimmung zwischen Beobachtung und Theorie vorhanden.

Tabelle 8.
Stahlstab der Tab. 5. In der Stromleitung $W = 0$. $PM_{\text{Max}} = 893$.

Capacität	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
$\delta.PM$	Im Condensatorzweig $W=0$	138	242	284	288	312	319	329	354	363	363
	Im Condensatorzweig $W=100$	138	171	220	227	228	240	232	235	241	242
	Im Condensatorzweig $W=300$	138	174	175	177	178	176	177	175	174	174
	Im Condensatorzweig $W=500$	138	160	162	162	162	163	164	161	163	159

Bei dem Stahlstab nimmt also $\delta \cdot PM$ mit wachsender Kapacität des Condensators zu bis zu einem Maximum, das bei widerstandslosem Condensatorzweig bei 0,8 Mikrofar. erreicht wird und desto früher eintritt, je mehr Widerstand der Zweig enthält. Bei $W = 300$ und $W = 500$ ändert sich $\delta \cdot PM$ kaum merkbar, wenn die Kapacität von 0,1 bis 1,0 Mikrofar. variiert wird. Bei dem Stahlstab bestehen demnach erheblich einfachere Verhältnisse als bei dem Drahtbündel, im Zusammenhange mit dem Fehlen der Maxima und Minima bei konstanter Kapacität und variablem Widerstand (Tabelle 5).

Bei dem Eisenstab übte die Hinzuschaltung des Condensators stets einen sehr geringen Einfluss auf die Grösse von $\delta \cdot PM$ aus, wie die folgenden Zahlen zeigen.

Tabelle 9.

Eisenstab der Tabelle 6. In der Stromleitung $W = 0$. $PM_{\text{Max}} = 725$.

Capacität	0	0,1	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0
$\delta \cdot PM$	321	326	323	338	335	345	347

$\delta \cdot PM$ nimmt mit wachsender Kapacität etwas zu.

Die Erklärung der hier hervortretenden Unterschiede zwischen dem Drahtbündel einer- und dem Eisen- oder Stahlstab andererseits wird in § 7 (Tabelle 14) gegeben werden.

§ 6. Anstatt Siemens'scher Rheostatenwiderstände schaltete ich nun eine bifilar gewickelte Rolle von einem Wiedemann'schen Galvanometer in den Condensatorzweig, entweder mit entgegengerichteter Schaltung ihrer beiden Drähte (ohne Selbstinduction), oder mit gleichgerichteter Schaltung (mit Selbstinduction), oder auch nur einen der Drähte.

Die benutzten Rollen besaßen folgende Widerstände (W) und Zahl der Windungen (Z):

Rolle	a	a'	α	α'	β	β'	δ
W	1204	1208	514	516	1044	1111	198
Z	2×2400	2×2400	2×1890	2×1890	2×1700	2×1700	2×1190

In die folgenden Tabellen sind auch Beobachtungen aufgenommen, welche erst im § 8 besprochen werden sollen, Beobachtungen nämlich über die Zunahme, welche das um $\delta \cdot PM$

geschwächte magnetische Moment erfährt, wenn man eine kleine Kraft in der Richtung der magnetisirenden wirken lässt. Die Intensität dieser Kraft ist durch Angabe des in den Stromkreis eingeschalteten Rheostatenwiderstandes bezeichnet.

Tabelle 10.

Drahtbündel in Paraffin. $P M_{\text{Max}} = 882$. Im Stromkreis $W = 0$.

Getheilte Rheostatenwiderstände im Condensatorzweig.			Rollen im Condensatorzweig.		
Rheostaten- widerstand	$\delta . P M$	Zunahme durch Strom mit $W = 40$	Rolle	$\delta . P M$	Zunahme durch Strom mit $W = 40$
400	639,6	404,6	β . M. S.	435,0	215,0
450	570,5	352,5	"	403,0	195,0
495	502,7	305,7	"	376,4	178,8
570	467,0	281,5	β . O. S.	240,7	134,0
670	367,0	218,5	β' . M. S.	278,5	115,5
770	312,8	185,0	"	272,0	111,8
900	251,5	144,5	β . O. S.	231,8	127,3
995	224,8	126,7	"	228,8	126,4
1100	211,0	116,0	α . M. S.	542,0	276,8
1200	193,2	103,0	"	535,0	273,0
1300	175,5	90,5	"	402,5	200,0
1400	163,8	81,0	"	345,0	165,5
1600	150,0	70,0	"	244,9	110,2
1800	140,3	62,0	α . O. S.	578,5	357,0
2000	139,0	56,4	$\frac{1}{2}\beta$.	252,0	151,2
2300	130,6	50,0	$\frac{1}{2}\beta'$.	252,0	152,0
2700	125,7	46,0			

Ist die Rolle O. S. geschaltet, so resultirt also immer ein etwas grösserer Werth von $\delta . P M$, als bei dem gleichen getheilten Rheostatenwiderstand erhalten wird.

Nach Tabelle 2 war dies zu erwarten, denn dort ergab sich bei dem ungetheilten bifilar ohne Selbstinduction gerichteten Rheostatenwiderstand stets ein grösseres $\delta . P M$ als bei dem getheilten. Hier waren aber die Rheostatenwiderstände sämmtlich getheilt, die Rollenwiderstände dagegen ungetheilt.

War dagegen die Rolle M. S. geschaltet, so war $\delta . P M$ bei β und β' grösser, bei α theils grösser, theils kleiner, als bei einem getheilten Rheostatenwiderstand der gleichen Grösse. Charakteristisch für die Schaltung M. S. ist ein sehr starkes

Tabelle 11.
 Drahtbündel in Paraffin. $P M_{\text{Max}} = 870$. Im Stromkreis $W = 0$.

Rheostatenwiderstände im Condensatorweig	W	$\delta.PM$	Zunahme durch Strom mit $W = 40$	a und a'				Rollen im Condensatorweig				a und a'					
				Rolle	$P.\delta M$	Zunahme durch Strom mit $W = 40$	Rolle	$\delta.PM$	Zunahme durch Strom mit $W = 40$	Rolle	$\delta.PM$	Zunahme durch Strom mit $W = 40$	Rolle	$\delta.PM$	Zunahme durch Strom mit $W = 40$		
450	573,0	349,6	$\frac{1}{2}a$) M. S. $W = 1204$	383,3	193,3	β) M. S. $W = 1044$	306,3	134,0	$\frac{1}{2}a$) M. S. $W = 514$	552,0	278,0	$\frac{1}{2}a$) O. S. $W = 1044$	543,8	275,0	$\frac{1}{2}a$) O. S. $W = 514$	480,2	240,4
495	500,5	300,2	$\frac{1}{2}a$) O. S. $W = 1204$	358,4	177,2	β) O. S. $W = 1044$	229,2	124,2	$\frac{1}{2}a$) O. S. $W = 514$	253,0	111,2	$\frac{1}{2}a$) O. S. $W = 514$	552,0	335,0	$\frac{1}{2}a$) O. S. $W = 514$	552,0	335,0
550	465,5	276,8	$\frac{1}{2}a$) O. S. $W = 1204$	221,6	85,2	β) O. S. $W = 1044$	243,0	143,3	$\frac{1}{2}a$) O. S. $W = 514$	305,7	175,0	$\frac{1}{2}a$) O. S. $W = 514$	257,7	175,0	$\frac{1}{2}a$) O. S. $W = 514$	305,7	175,0
620	400,0	235,7	$\frac{1}{2}a$) O. S. $W = 602$	136,4	66,2	β) O. S. $W = 522$	243,0	143,3	$\frac{1}{2}a$) O. S. $W = 514$	308,0	178,0	$\frac{1}{2}a$) O. S. $W = 514$	258,0	178,0	$\frac{1}{2}a$) O. S. $W = 514$	308,0	178,0
700	346,2	202,0	$\frac{1}{2}a$) O. S. $W = 1208$	137,5	65,9	β) O. S. $W = 1111$	230,2	146,7	$\frac{1}{2}a$) O. S. $W = 514$	308,0	178,0	$\frac{1}{2}a$) O. S. $W = 514$	258,0	178,0	$\frac{1}{2}a$) O. S. $W = 514$	308,0	178,0
800	288,0	166,8	$\frac{1}{2}a$) O. S. $W = 1208$	368,8	186,8	β) O. S. $W = 1111$	293,3	124,6	$\frac{1}{2}a$) O. S. $W = 514$	308,0	178,0	$\frac{1}{2}a$) O. S. $W = 514$	258,0	178,0	$\frac{1}{2}a$) O. S. $W = 514$	308,0	178,0
900	244,8	139,0	$\frac{1}{2}a$) O. S. $W = 1208$	356,5	177,8	β) O. S. $W = 1111$	248,0	144,9	$\frac{1}{2}a$) O. S. $W = 514$	308,0	178,0	$\frac{1}{2}a$) O. S. $W = 514$	258,0	178,0	$\frac{1}{2}a$) O. S. $W = 514$	308,0	178,0
995	216,5	120,5	$\frac{1}{2}a$) O. S. $W = 1208$	246,8	105,0	β) O. S. $W = 1111$	225,2	122,5	$\frac{1}{2}a$) O. S. $W = 514$	308,0	178,0	$\frac{1}{2}a$) O. S. $W = 514$	258,0	178,0	$\frac{1}{2}a$) O. S. $W = 514$	308,0	178,0
1150	196,5	105,2	$\frac{1}{2}a$) O. S. $W = 1208$	205,7	76,1	β) O. S. $W = 1111$	248,0	144,9	$\frac{1}{2}a$) O. S. $W = 514$	308,0	178,0	$\frac{1}{2}a$) O. S. $W = 514$	258,0	178,0	$\frac{1}{2}a$) O. S. $W = 514$	308,0	178,0
1400	161,2	80,3	$\frac{1}{2}a$) O. S. $W = 604$	176,5	59,0	β) O. S. $W = 555$	248,0	144,9	$\frac{1}{2}a$) O. S. $W = 514$	308,0	178,0	$\frac{1}{2}a$) O. S. $W = 514$	258,0	178,0	$\frac{1}{2}a$) O. S. $W = 514$	308,0	178,0
1700	142,5	65,0	$\frac{1}{2}a$) O. S. $W = 604$	133,2	67,8	β) O. S. $W = 2155$	266,7	100,0	$\frac{1}{2}a$) O. S. $W = 514$	308,0	178,0	$\frac{1}{2}a$) O. S. $W = 514$	258,0	178,0	$\frac{1}{2}a$) O. S. $W = 514$	308,0	178,0
1970	131,8	56,0	$\frac{1}{2}a$) O. S. $W = 2412$	162,5	42,5	β) O. S. $W = 2155$	206,1	64,8	$\frac{1}{2}a$) O. S. $W = 514$	308,0	178,0	$\frac{1}{2}a$) O. S. $W = 514$	258,0	178,0	$\frac{1}{2}a$) O. S. $W = 514$	308,0	178,0
			$\frac{1}{2}a$) O. S. $W = 2412$	158,0	39,3	β) O. S. $W = 2155$	195,0	58,8	$\frac{1}{2}a$) O. S. $W = 514$	308,0	178,0	$\frac{1}{2}a$) O. S. $W = 514$	258,0	178,0	$\frac{1}{2}a$) O. S. $W = 514$	308,0	178,0
			$\frac{1}{2}a$) O. S. $W = 2412$	156,0	38,2	β) O. S. $W = 2155$	167,2	47,1	$\frac{1}{2}a$) O. S. $W = 514$	308,0	178,0	$\frac{1}{2}a$) O. S. $W = 514$	258,0	178,0	$\frac{1}{2}a$) O. S. $W = 514$	308,0	178,0
			$\frac{1}{2}a$) O. S. $W = 1206$	110,0	36,9	β) O. S. $W = 1077$	147,6	79,8	$\frac{1}{2}a$) O. S. $W = 515$	308,0	178,0	$\frac{1}{2}a$) O. S. $W = 515$	258,0	178,0	$\frac{1}{2}a$) O. S. $W = 515$	308,0	178,0

Schwanken der Werthe. Ist endlich nur *ein* Draht der Rolle eingeschaltet, so resultirt ein $\delta.PM$, welches nur etwa gleich der Hälfte des nach dem Widerstände zu erwartenden ist (Tab. 11 auf p. 13).

Diese Beobachtungen bestätigen die vorhergehenden in ausführlicher Weise. Die graphische Darstellung — Abscisse = Widerstand, Ordinate = $\delta.PM$ — liefert in beiden Fällen für die Rheostatenwiderstände eine sehr regelmässig verlaufende Curve. Die Beobachtungen mit Rollen gruppiren sich um diese derart, dass diejenigen mit *einem* Draht sämmtlich weit unterhalb der Curve, diejenigen mit Schaltung ohne Selbstinduction etwas oberhalb der Curve, und, wenn mit Selbstinduction geschaltet, meist weit oberhalb, und nur bei den Rollen α und α' (nicht aber bei der Summe beider $\alpha + \alpha'$) zum Theil auch unterhalb der Curve fallen.

Aus diesen Resultaten folgern wir: Da eine Wiedemann'sche Rolle, von welcher nur *ein* Draht eingeschaltet ist, vorzugsweise Selbstinduction besitzt, so wird durch Selbstinduction in der Condensatorleitung $\delta.PM$ verkleinert. Das ist auch leicht verständlich, denn je grösser der Coefficient der Selbstinduction in der Zuleitung zum Condensator, ein desto grösserer Theil des Extrastromes wird den Weg zum Condensator meiden und sich vielmehr in der Unterbrechungsstelle ausgleichen. Wenn beide Drähte der Rolle in entgegengesetzter Richtung eingeschaltet sind, so ist der Coefficient der Selbstinduction sicher klein, dagegen kann bei grosser Windungszahl die electrostatische Capacität einen merklichen Werth erreichen. Hierdurch wird also $\delta.PM$ vergrössert, wie wir das auch bei den grösseren Widerständen des Siemens'schen Rheostaten gesehen haben. Werden endlich die beiden Drähte auf gleiche Richtung umgeschaltet, so besitzt die Rolle sowohl Selbstinduction als Capacität. Da diese beiden Factoren $\delta.PM$ in entgegengesetzter Richtung beeinflussen, so kann durch die Umschaltung $\delta.PM$ ab- oder zunehmen, je nachdem der Einfluss des ersten Factors oder des letzten überwiegt. Im allgemeinen ist der Einfluss der Capacität grösser, als derjenige der Selbstinduction, nur bei den Rollen α und α' bemerkt man gelegentlich auch das Gegentheil.

§ 7. Die Versuche mit Rheostatenwiderständen und

Wiedemann'schen Galvanometerrollen bewiesen, dass der Widerstand, durch welchen man die Belegungen des Condensators mit dem Unterbrecher des Stromkreises verbindet, nicht allein durch seine Grösse, sondern auch durch seine Anordnung die Grösse von $\delta \cdot PM$ beeinflusst.

War der Widerstand nicht zu klein, d. h. überschritt er 200 S. E., so zeigte sich eine regelmässige Abnahme von $\delta \cdot PM$ mit wachsendem Widerstand unter den drei Bedingungen, dass derselbe sich aus einer Anzahl kleinerer, bifilar gewickelter und auf kleine Selbstinduction geschalteter Widerstände zusammensetzte.

Nach den Ergebnissen der vorhergehenden Abhandlung war es nun wahrscheinlich, dass, wenn man statt der bifilar gewickelten Widerstände solche nach Chaperon wählte, die erste Bedingung nicht eingehalten zu werden brauchte, mit anderen Worten, das man mit einem einzigen grossen nach Chaperon gewickelten Widerstand dasselbe $\delta \cdot PM$ erhalten würde, wie mit der äquivalenten Vielheit Siemens'scher bifilar gewickelter Widerstände.

Tabelle 12.

Drahtbündel in Paraffin. $PM_{Max} = 966$. Ausser dem bisher gebrauchten grossen Siemens'schen Widerstandskasten von Summa 10000 S. E. wurde noch ein zweiter kleinerer von 1000 S. E. benutzt. Die nach Chaperon gewickelten Rollen hielten die eine 2000 S. E., die andere 3000 S. E.

Zusammensetzung der Widerstände im Condensatorzweig	In Summa	$\delta \cdot PM$	Zunahme durch Strom mit $W = 60$
500 + 200 + ... + 500 + 200 + ... S.	2000 S.	130,4	33,6
1000 + 1000 S.	2000 S.	137,3	34,4
2000 S.	2000 S.	163,5	38,2
2000 Ch.	2000 Ch.	128,7	33,5
1000 + 500 + 200 + ... + 500 S. + 200 + ... S.	2500 S.	125,2	28,4
1000 + 500 + 200 + ... + 500 + 200 + ... S.	3000 S.	120,6	25,5
2000 + 1000 S.	3000 S.	144,5	25,7
3000 Ch.	3000 Ch.	118,2	25,4
2000 + 1000 + 1000 + 500 + ... S. 5000 S.	5000 S.	126,0	21,7
	5000 S.	228,4	50,7
		178,0	31,0
		201,2	39,0
3000 + 2000 Ch.	5000 Ch.	116,7	22,1

Bei den nach Chaperon gewickelten, grossen und ungetheilten Widerständen ergiebt sich also in der That ein $\delta.PM$, welches sogar noch etwas kleiner ist, als das mit vielfach getheilten, bifilar gewickelten Widerständen erhaltene.

Noch grössere Unterschiede zwischen Chaperon'schen und Siemens'schen Widerständen zeigt die folgende Versuchsreihe, welche zugleich in lehrreicher Weise den Einfluss einer Verzögerung im Verschwinden des inducirten Magnetismus darstellt (vgl. § 4).

Tabelle 13.

Das Drahtbündel bestand aus einer Anzahl feiner Eisendrähte, welche verkupfert und, nicht völlig gerade gebogen, in eine Glasmöhre gesteckt waren, sodass sie sich nur an verhältnissmässig wenigen Stellen berührten.

$$PM_{\text{Max}} = 940.$$

a) Im Condensatorzweig befinden sich Siemens'sche oder Chaperon'sche Widerstände.

W (Siem.)	$\delta.PM$	W (Siem.)	$\delta.PM$
0	920	400	481
1	916	500	371
2	914	$200 + 100 + 100 + 50$	
3	904	$+ \dots = 500$	345
5	912	1000	117,1
7	908	$500 + 200 + \dots = 1000$	108,7
10	907	1500	58,5
13	910	2000	182,7
17	918	$1000 + 500 + \dots$	
20	923	$= 2000$	41,0
23	927	$2000 + 1000 = 3000$	65,5
27	921	$1000 + 1000 + 500 + \dots$	
32	910	$= 3000$	33,5
37	888	$2000 + 1000 + 1000$	
40	877	$= 4000$	54,0
45	861	5000	248,7
50	851		216,7
60	857		193,5
70	917	$2000 + 1000 + 1000$	
80	956	$+ 500 + \dots = 5000$	43,7
90	1007		
100	1053	W (Chap.)	
120	1109	2000	37,9
140	1117	3000	28,7
170	1054	$2000 + 3000 = 5000$	28,2
200	955		
250	813	$W = \infty$ (Ohne Condensator)	
300	712		51,2

b) Im Condensatorzweig befindet sich eine Wiedemann'sche Rolle.

	Rolle α ($W = 515$)		Rolle δ ($W = 198$)	
	Ohne S. I.	Mit S. I.	Ohne S. I.	Mit S. I.
$\delta \cdot PM$ {	377	449	994	218
	380	369	986	167
	—	—	—	288

Die Zwischenräume zwischen den Drähten wurden nun mit Quecksilber ausgefüllt. Es entstanden also jetzt beim Oeffnen des Stromes peripherische Inductionsströme in dem Quecksilber und den Drähten des Bündels, welche das Verschwinden des inducirten Magnetismus verzögerten.

c) Siemens'sche oder Chaperon'sche Widerstände im Condensatorzweig

W (Siem.)	$\delta \cdot PM$	W (Siem.)	$\delta \cdot PM$
0	535	300	66
1	526	400	48
2	509	$200 + 100 + \dots = 500$	40
3	494	$500 + 200 + 100 + \dots$	
5	496	$= 1000$	23
7	497	1000	25
10	463	$1000 + 500 + 200 + \dots$	
15	461	$= 2000$	18
20	444	2000	20
30	401	$2000 + 1000 + 1000$	
40	371	$+ \dots = 5000$	16
50	337	5000	18
70	253	W (Chaperon)	
100	209	2000	19
150	125	$2000 + 3000 = 5000$	16
200	101	∞	16

d) Wiedemann'sche Rollen im Condensatorzweig.

	Rolle α ($W = 515$)		Rolle δ ($W = 198$)	
	Ohne S. I.	Mit S. I.	Ohne S. I.	Mit S. I.
$\delta \cdot PM$ {	45	50	127	107
	43	50	103	100
	44	50	123	106

Bei diesem Drahtbündel nimmt also, wenn die Drähte von einander isolirt sind, $\delta \cdot PM$ denselben Verlauf mit wachsendem Rheostatenwiderstand, wie bei dem Drahtbündel in Paraffin (Tab. 2).

Bei getheilten Siemens'schen Widerständen ist $\delta \cdot PM$

erheblich kleiner, als bei den ungetheilten, und noch etwas geringer ist es bei den Chaperon'schen. Wird aber der Zwischenraum zwischen den Drähten mit Quecksilber ausgefüllt, so ergeben sich überhaupt viel kleinere Werthe von $\delta.PM$, und zwischen getheilten und ungetheilten Siemens'schen und zwischen diesen und den Chaperon'schen Widerständen besteht kaum noch ein Unterschied. Ebenso ist es jetzt beinahe gleichgültig, ob eine Wiedemann'sche Rolle mit oder ob sie ohne $S.I$ in den Condensatorzweig eingeschaltet ist. Die Maxima und Minima, welche, wenn die Drähte isolirt sind, $\delta.PM$ mit wachsendem Rheostatenwiderstand durchläuft, sind verschwunden; es erfolgt jetzt eine continuirliche Abnahme, selbst das zweite Maximum ist nicht mehr vorhanden, das (§ 4, Tab. 4) auch dann noch übrig geblieben war, als das Verschwinden des Magnetismus durch Umgebung des Drahtbündels mit einem aufgeschlitzten Messingrohr verzögert wurde. Im Grossen und Ganzen verhält sich also das Drahtbündel mit der Quecksilberfüllung wie ein Stab, und man kann also umgekehrt wohl schliessen, dass das Verhalten eines Stabes, das Fehlen der Maxima und Minima von $\delta.PM$ bei demselben und die Unempfindlichkeit des $\delta.PM$ gegen die Zusammensetzung des Widerstands, sich durch die Verzögerung, welche das Verschwinden des Magnetismus infolge der in der Masse des Stabes inducirten Ströme erleidet, und durch den daraus folgenden gleichmässigeren Ablauf des Extrastromes erklärt.

Aus diesen Beobachtungen können wir folgende Schlüsse ziehen:

Zunächst, dass Chaperon'sche Widerstandsrollen merklich frei von Selbstinduction und Capacität noch in Stücken von 3000 S. E. sind, wo die Capacität einer Siemens'schen Rolle schon sehr erheblich ist. Die Freiheit von Capacität ergiebt sich aus der Kleinheit der Werthe von $\delta.PM$. Da dieselben jedoch sogar denjenigen noch nachstehen, welche bei einer Vielheit kleiner Siemens'scher Widerstände beobachtet werden, so könnte man muthmaassen, dass bei den Chaperon'schen Widerständen die Selbstinduction nicht unmerklich sei. Dieser Einwurf ist aber schon durch die Resultate der vorhergehenden Abhandlung entkräftet.

Zweitens schliessen wir, dass bei grosser Verzögerung im Verschwinden des inducirten Magnetismus, also bei sehr gleichmässigem Ablauf des den Condensator ladenden Extrastroms electrische Oscillationen nicht auftreten. Das ergiebt sich aus dem Fehlen der Maxima und Minima von $\delta.PM$.

Drittens erkennen wir, dass die Grösse des Selbstinductionscoefficienten der Condensatorzuleitung gleichgültig wird, sobald der Extrastrom eine gewisse Gleichmässigkeit des Ablaufes erreicht. Das ist auch durchaus selbstverständlich.

Das zweite dieser Resultate veranlasste mich zu untersuchen, ob auch das complicirte Verhalten von $\delta.PM$ bei Aenderung der Capacität, welches (§ 5) ein Bündel isolirter Drähte zeigte, nicht dem einfachen Verhalten, das bei einem Stahlstab gefunden wurde, Platz machen würde, sobald man nur die Drähte des Bündels durch Quecksilber leitend verband.

Zu den Versuchen diente das Drahtbündel der Tab. 18.

Tabelle 14.

$PM_{Max} = 966$. Es ergaben sich folgende Werthe von $\delta.PM$ bei den vorgesetzten Condensatorcapacitäten.

Capacität	Drähte isolirt			Drähte leitend verbunden		
	Widerstand im Condensatorzweig			Widerstand im Condensatorzweig		
	0	100	350	0	100	350
0,1	929	890	952	228	101	56
0,2	929	923	868	367	—	63
0,3	926	997	761	459	181	58
0,4	927	1040	621	506	—	63
0,5	934	1077	608	526	252	60
0,7	928	—	475	684	287	56
0,9	935	—	436	712	305	56
1,1	—	> 1100	316	768	336	55
1,2	932		—	—	—	—
1,3	—		280	799	356	55
1,5	938	—	282	817	352	55

Während also bei isolirten Drähten der Verlauf von $\delta.PM$ der gleiche ist, wie bei dem Drahtbündel in Paraffin (§ 5), nämlich bei $W = 0$ Constantz, bei $W = 100$ Zunahme und bei $W = 350$ Abnahme mit wachsender Capacität stattfindet, so verhält sich bei leitend verbundenen Drähten $\delta.PM$ in der That wie bei dem Stahlstab (§ 5), d. h. $\delta.PM$ wächst mit

wachsender Capacität, wenn $W = 0$ oder $W = 100$, und bleibt constant, wenn $W = 350$ ist.

Sobald demnach infolge langsamem Verschwindens des inducirten Magnetismus der Extrastrom mit einer gewissen Gleichmässigkeit abläuft, hängt $\delta.PM$ in sehr einfacher Weise von der Capacität des Condensators ab. Ist die Capacität klein, so gleicht sich ein bedeutender Theil des Extrastroms im Funken aus. Mit wachsender Capacität vermag der Condensator einen immer grösseren Theil des Extrastroms aufzuspeichern und $\delta.PM$ wächst.

Erfolgt dagegen das Verschwinden des Magnetismus sehr schnell, wie bei dem Bündel isolirter Drähte, so complicirt sich der Einfluss der Capacität auf $\delta.PM$ durch das Auftreten electrischer Schwingungen.

§ 8. Die Grösse von $\delta.PM$ hing also sowohl von der Grösse, als von der Anordnung des in den Condensatorzweig eingeschalteten Widerstands ab. Nach früheren Erfahrungen war zu vermuthen, dass auch der Zustand des resultirenden $PM = PM_{\text{Max}} - \delta.PM$ entsprechende Unterschiede zeigen würde. Prüft man nun den Zustand in der Weise, dass man die Zunahme des PM beobachtet, welche — nach Ausschaltung des Condensators — durch eine der magnetisirenden gleichgerichtete, kleinere Kraft hervorgerufen wird, so findet man in der That erhebliche Verschiedenheiten: auf gleich grosse Werthe von $\delta.PM$ folgt im allgemeinen eine sehr verschiedene Zunahme.

Einige solcher Beobachtungen mit dem Drahtbündel sind in den vorhergehenden Tabellen schon enthalten (Tab. 10. 11. 12).

Ich theile zunächst noch einige weitere Beobachtungen mit, bei welchen der Zustand des permanenten Moments zum Theil auch in der Weise untersucht wurde, dass man auf $PM = PM_{\text{Max}} - \delta.PM$ eine kleine, der magnetisirenden *entgegengerichtete* Kraft einwirken liess und die dadurch hervorgebrachte weitere Abnahme des permanenten Moments beobachtete (Tab. 15 und 16 auf p. 21).

Die Tabellen 15 und 16 sowie die Tabellen 10, 11 und 12 zeigen, dass, wie zu erwarten war, die Zunahme des PM durch einen gleichgerichteten und seine Abnahme durch einen entgegengerichteten Strom mit der Grösse von $\delta.PM$, der vorhergegangenen Abnahme des PM_{Max} , variiert. Enthält der

Tabelle 15.

Drahtbündel in Paraffin. Getheilte Rheostatenwiderstände im Condensatorzweig. Nach Ausschaltung des letzteren werden $W = 50$ S.-E. in die Stromleitung geschaltet, und dieser schwächere Strom in der Richtung des magnetisirenden geschickt. $PM_{Max} = 827$.

Widerstand	Abnahme des PM_{Max}	Zunahme des PM durch $W = 50$	Widerstand	Abnahme des PM_{Max}	Zunahme des PM durch $W = 50$
1,5	821	262,7	85	885	344,0
7,5	817	258,3	90	881	336,5
12	815	254,3	100	922	387,5
16	814 Min	249,6 Min	110	948	396,0
20	819	256,0	120	964	449,8
25	827	274,7	130	994 Max	476,2
30	831 Max	293,5 Max	140	974	481,3
35	794	266,8	150	968	489,6
40	780	245,0	160	964	493,6 Max
47	772 Min	231,2	175	921	463,2
60	778	219,1 Min	200	854	434,3
70	808	248,5	215	830	420,0
80	851	295,4			

Tabelle 16.

Drahtbündel in Paraffin. $PM_{Max} = 716$. Der prüfende, schwächere Strom fiesst dem magnetisirenden entgegengerichtet. Der dabei eingeschaltete Widerstand beträgt $W = 70$.

Widerstand	Abnahme des PM_{Max}	Abnahme des PM durch $W = 70$	Widerstand	Abnahme des PM_{Max}	Abnahme des PM durch $W = 70$
0	706,2	105,2	100	764,0	141,0
2	706,0	102,0	110	827,2	90,6
4	704,8	100,2	120	833,2	77,8
9	701,0 Min	100,4	130	869,2	84,3
15	704,4	113,5 Max	140	864,4	64,2
20	708,5	107,7	160	889,5	47,9
25	710,3 Max	104,7	180	896,0 Max	40,0
30	695,2	94,8 Min	200	840,0	28,7
35	682,8	98,2	230	773,3	16,0 Min
40	684,5	98,5	260	684,2	26,1
50	664,0	119,0	300	624,2	51,2
65	663,9 Min	162,9 Max	350	563,3	80,4
80	714,2	153,8	400	482,0	133,0
90	759,3	134,4	450	399,2	205,8

Condensatorzweig nur kleinere Rheostatenwiderstände, so wächst die Zunahme durch den gleichgerichteten Strom mit wachsendem $\delta \cdot PM$ und die Abnahme durch den entgegengerichteten Strom mit abnehmendem $\delta \cdot PM$; jedoch nur unter der Voraussetzung, dass die $\delta \cdot PM$ durch kein Maximum oder Minimum hindurchgehen. Zwar fallen mit den Maximis (Minimis) von $\delta \cdot PM$ Maxima (Minima) der Zunahme durch gleichgerichteten Strom und Minima (Maxima) der Abnahme durch entgegengerichteten Strom zusammen — genau genommen, verspäten sie sich etwas, wie man namentlich bei dem zweiten Maximum von $\delta \cdot PM$ sieht —, aber gleichen Werthen von $\delta \cdot PM$, welche zu beiden Seiten eines Maximums oder Minimums liegen, entsprechen nicht gleiche Werthe der Zu- oder Abnahme durch den gleich- oder entgegengerichteten Strom. Es ist vielmehr, wie bei dem zweiten Maximum von $\delta \cdot PM$ am besten zu verfolgen, *nach* einem Maximum die Zunahme grösser und die Abnahme kleiner, als *vor* demselben und bei einem Minimum verhält es sich umgekehrt. Trägt man also die $\delta \cdot PM$ als Abscissen, die Zunahme durch einen gleichgerichteten Strom als Ordinaten auf, so steigt die Curve vom zweiten Minimum von $\delta \cdot PM$ an geradlinig auf, beschreibt in der Nähe des zweiten Maximums von $\delta \cdot PM$ einen gegen die Ordinatenaxe concaven Bogen und wird dann wieder geradlinig, indem sie stets über dem ersten Ast bleibt. Einen derart regelmässigen Verlauf nimmt die Curve aber nur dann, wenn die grösseren Rheostatenwiderstände vielfach getheilt sind. Schaltet man dagegen die Rolle mit 2000 oder 5000 S. E. ein, so bewirkt der nachfolgende gleichgerichtete Strom eine relativ zu kleine Zunahme und der entgegengerichtete Strom eine relativ zu grosse Abnahme. Bei $W = 5000$ (ungetheilt) erhielt man nach Tab. 2 ein $\delta \cdot PM$ von etwa der gleichen *Grösse*, wie bei $W = 1100$ (getheilt), aber der *Zustand* des permanenten Moments ist in den beiden Fällen ein anderer, wie die folgenden Zahlen darthun.

Tabelle 17.

	$\delta \cdot PM$	Zunahme des PM durch gleichger. Strom mit $W = 20$	$\delta \cdot PM$	Abnahme des PM durch entgegenger. Strom mit $W = 500$
$W = 5000$	178,6	106,1	161,0	179,4
$W = 1100$	158,8	113,3	162,5	127,9

Die Zunahme ist also bei $W = 5000$ trotz des grösseren $\delta \cdot PM$ kleiner als bei $W = 1100$, und die Abnahme bei gleichem $\delta \cdot PM$ erheblich grösser als bei $W = 1100$.

Dagegen verhalten sich nach Chaperons Verfahren gewickelte grosse und ungetheilte Widerstände wie getheilte Siemens'sche (Tab. 12).

Ueber den Zustand des permanenten Moments, welcher bei Einschaltung Wiedemann'scher Rollen resultirt, geben die Tab. 10 und 11 Aufschluss. Zeichnet man hier zuerst die Curve für die (getheilten) Rheostatenwiderstände (Abscisse = $\delta \cdot PM$, Ordinate = Zunahme durch gleichgerichteten Strom) und trägt dann die auf die Rollen bezüglichen Werthe bei, so sieht man, dass sie sämmtlich *unter* der Curve liegen, wenn die Rolle auf „mit Selbstinduction“ geschaltet war und dass sie der Curve näher rücken und fast in dieselbe fallen, wenn $\alpha, \alpha', \beta, \beta'$ „ohne Selbstinduction“ geschaltet sind, dass sie dagegen bei α und α' , den beiden Rollen mit grösstem Widerstände und grösster Windungszahl, auch dann noch weit unter der Curve bleiben, ganz entsprechend den Beobachtungen mit dem 2000er und dem 5000er des Siemens'schen Rheostaten. Ist nur *ein* Draht der Rolle eingeschaltet, so liegen dagegen die Werthe stets ein klein wenig *oberhalb* der Curve.

Auch mit dem Stahlstab (Tab. 5 und 8) wurden einige Versuchsreihen gemacht, bei denen getheilte Rheostatenwiderstände im Condensatorzweig lagen, während der folgende gleichgerichtete Strom mit $W = 5$ oder mit $W = 30$ geschlossen wurde.

Mit wachsendem Rheostatenwiderstand im Condensatorzweig nahm, wie aus Tab. 5 bekannt, $\delta \cdot PM$ continuirlich ab. Durch einen Strom mit $W = 5$ erfolgte sodann eine mit wachsendem $\delta \cdot PM$ in linearem Verhältniss wachsende Zunahme. Wurde dagegen der Strom für die Untersuchung des Zustandes schwächer gewählt ($W = 30$), so wuchs die Zunahme mit wachsendem $\delta \cdot PM$ zuerst an, erreichte ein Maximum und nahm dann wieder ab. Stets war die Zunahme bedeutend kleiner, als wenn PM einen gleich grossen Verlust durch einen conträren Strom erlitten hatte.

Offenbar ist der erste Strom mit $W = 5$ zu stark, um über Verschiedenheiten im Zustande des permanenten Momentes Auskunft geben zu können, er wirkt nivellirend auf die Zu-

standsverschiedenheiten ein. Je schwächer der zu prüfende Strom ist, je weniger er also selbst das PM ändert, desto besser wird er geeignet sein, Verschiedenheiten des Zustandes aufzudecken. Solche sind nach der Versuchsreihe mit $W = 30$ also auch bei dem Stahlstab vorhanden, obwohl die Reihe der $\delta. PM$ ohne Maxima und Minima verlief.

Bei einigen Versuchsreihen mit dem Drahtbündel in Paraffin habe ich auch die durch die prüfende Kraft inducirten verschwindenden Momente gemessen.

Tabelle 18.

Im Condensatorzweig lag Rolle β ($W = 1044$) mit oder ohne Selbstinduction geschaltet, oder eine nach Chaperon gewickelte Rolle von 1000 S.-E. Widerstand. Als prüfende Kraft diente der Strom mit $W = 60$, welcher mehrmals zur Wirkung gelangte. Die angegebenen Zahlen sind die erreichten Grenzwerte. $PM_{\text{Max}} = 822$.

	Rolle β mit Selbstinduction geschaltet			Rolle β ohne Selbst- induction geschaltet	Rolle nach Chaperon
Abnahme des $PM_{\text{Max}} (= \delta. PM)$	302,0	416,7	493,0	217,4	192,2
Zunahme des $PM_{\text{Max}} (- \delta. PM)$	74,0	98,8	113,0	85,3	76,8
Ganzes inducirtes Moment	264,2	291,8	307,3	301,9	295,2
Verschwindendes Moment	190,2	198,0	194,3	215,6	218,4

Wenn also auf „ohne Selbstinduction“ geschaltet oder eine Chaperon'sche Rolle (von etwas kleinerem Widerstande als β) benutzt war, so inducire eine schwächere, gleichgerichtete Kraft ein *grösseres* verschwindendes Moment als wenn auf „mit Selbstinduction“ geschaltet war. Die Interpretation dieser Versuche wird jedoch dadurch erschwert, dass in beiden Fällen die permanenten Momente, welche die prüfende Kraft vorfand von wesentlich verschiedener Grösse waren, und dies ist bekanntlich im Allgemeinen nicht ohne Einfluss auf die Grösse des zu inducirenden Moments.¹⁾ Ich verfuhr desshalb bei anderen

1) Hier war er jedoch offenbar sehr gering, denn obwohl in den drei Versuchsreihen „mit Selbstinduction“ die $\delta. PM$ von 302,0 bis 493,0 variirten, änderte sich das verschwindende Moment nur von 190,2 bis 194,3.

Versuchen in der Weise, dass ich durch Einschaltung zweier verschieden grosser und verschieden angeordneter Rheostatenwiderstände in den Condensatorzweig etwa gleiche $\delta \cdot PM$ erzeugte. Solche Widerstände waren z. B. $W = 2000$ (ungeheilt) und $W = 950$ (getheilt) oder $W = 5000$ (ungetheilt) und $W = 800$ (getheilt).

$W =$	2000	950	5000	800
Abnahme des $PM_{\text{Max}} (= \delta \cdot PM)$	208,7	220,0	249,0	268,2
Zunahme des $PM_{\text{Max}} (- \delta \cdot PM)$	61,0	88,2	80,2	105,0
Ganzes inducirtes Moment	258,6	298,0	276,0	314,5
Verschwindendes Moment TM	197,6	209,8	195,8	209,5

Auch hier besteht also ein Unterschied der verschwindenden Momente: TM ist grösser, wenn getheilter, als wenn ungetheilter Widerstand eingeschaltet gewesen war, die Unterschiede von TM liegen also in der gleichen Richtung, wie diejenigen der Zunahme von PM ; d. h. je leichter es ist die Molecularmagnete temporär aus ihren Gleichgewichtslagen zu entfernen, desto leichter ist auch die permanente Änderung derselben.

Von den in diesem Abschnitt niedergelegten Resultaten erklärt sich die Verschiedenheit des Zustandes vor und nach einem Maximum oder Minimum von $\delta \cdot PM$ leicht aus der Annahme, welche im § 3 betreffs der Ursache der Maxima und Minima selbst gemacht wurde. Nach derselben schliesst die Reihe der electrischen Schwingungen z. B. vom zweiten Minimum bis zum zweiten Maximum mit einer dem magnetisirenden Strom gleichgerichteten, d. h. magnetisirend wirkenden, nach dem zweiten Maximum aber mit einer entmagnetisirend wirkenden. Eine nachfolgende kleine magnetisirende Kraft wird deshalb im ersten Falle eine kleinere Zunahme und eine entmagnetisirende Kraft eine grössere Abnahme hervorbringen, als im zweiten.

Betrachten wir kleine Siemens'sche Rheostatenwider-

stände einzeln und in Summe als frei von Selbstinduction und Capacität, so zeigt uns die Beobachtung mit *einem* Draht einer Wiedemann'schen Rolle, dass Selbstinduction im Condensatorzweig den Zustand des permanenten Moments nur wenig beeinflusst, und zwar in dem Sinne, dass dasselbe etwas *leichter* in einen grösseren Werth übergeführt werden kann.

Die entgegengesetzte Wirkung übt eine Rolle aus, welche keine Selbstinduction, wohl aber eine merkliche Capacität (grosse Siemens'sche Widerstände oder Wiedemann'sche Rollen mit entgegengerichteter Schaltung ihrer Drähte) besitzt, hier resultirt ein Zustand, welcher sich viel schwerer nach der Seite grösseren permanenten Moments, aber leichter nach der entgegengesetzten ändert, als wenn die Zuleitung zum Condensator capacitätsfrei gewesen wäre. Sind aber die Drähte der Wiedemann'schen Rolle gleichgerichtet geschaltet, tritt also sowohl Selbstinduction als Capacität auf, so überwiegt doch immer der Einfluss der letzteren auf den Zustand des permanenten Moments. Durch die Umschaltung der Drähte hat die Selbstinduction stark zugenommen, aber auch die Capacität der Rolle muss gewachsen sein, da die Zunahme der Selbstinduction allein den Zustand gerade in der entgegengesetzten Richtung, als beobachtet, geändert haben würde. Nun ist wohl die Wirkung von Selbstinduction im Condensatorzweig auf den Zustand zu verstehen: Sie hindert den Extrastrom, in den Condensator einzutreten, zwingt ihn also, in grösserer Menge den Weg durch die Unterbrechungsstelle zu nehmen. Weshalb aber eine Rollencapacität im Condensatorzweig so, wie beschrieben, und nicht anders wirkt, dafür finde ich keine Erklärung. Die Capacität an und für sich ist es nicht, welche den Zustand so stark beeinflusst. Man kann die Capacität des *Condensators* in weiten Grenzen variiren und findet doch den Zustand nicht wesentlich sich ändernd.

§ 9. Ich stelle die hauptsächlichsten Resultate nun zusammen.

a) Schaltet man parallel zur Unterbrechungsstelle eines magnetisirenden Stromkreises einen Condensator, so fällt das permanente (Sättigungs-) Moment eines Bündels voneinander isolirter dünner Eisendrähte bei kleinen Widerständen im Stromkreis mit Oeffnung des Unterbrechers fast auf Null. Mit

wachsendem Widerstand im Stromkreis wird die Abnahme $\delta.PM$ continuirlich kleiner und steht bei grossen Widerständen sogar hinter derjenigen zurück, die man bei Unterbrechung ohne Condensator beobachtet.

b) Legt man den Rheostaten in die Zuleitung zum Condensator und setzt den Widerstand aus möglichst vielen Theilen zusammen, so durchläuft $\delta.PM$ mit wachsendem Widerstand zwei Maxima und zwei Minima. Dieselben sind nicht bedingt durch die Construction des Rheostaten. Bei den ungetheilten Widerständen 500, 1000, 2000 und 5000, sowie bei Summen, in welchen diese vorherrschen, ergeben sich aus der Reihe heraustretende, zu grosse Werthe von $\delta.PM$.

c) Bei einem Stahlstab verschwindet infolge der Anlegung des Condensators ein kleinerer Theil des permanenten Moments, als bei einem Eisendrahtbündel; der Einfluss der Zusammensetzung des Widerstandes im Condensatorzweig ist in geringem Maasse vorhanden. Bei einem Eisenstabe vergrössert die Zuschaltung des Condensators $\delta.IM$ nur um einen sehr kleinen Betrag.

d) Maxima und Minima von $\delta.PM$ treten bei den Stäben nicht auf, die Abnahme mit wachsendem Widerstand im Condensatorzweig ist eine continuirliche. Bei einem Drahtbündel kann man die Maxima und Minima dadurch beseitigen, dass man das Verschwinden seines inducirten Magnetismus verzögert.

e) Von der Capacität des Condensators sind die Maxima und Minima von $\delta.PM$ im wesentlichen unabhängig. War der Widerstand im Condensatorzweig klein, so blieb $\delta.PM$ constant trotz einer Aenderung der Capacität auf das Fünf-fache, bei mittleren Widerständen trat sowohl Ab- als Zunahme auf, bei grossen nahm $\delta.PM$ stetig ab, wenn die Capacität von 0,1 Mikrofar. bis auf 1,5 Mikrofar. zunahm.

f) Bei dem Stahlstab nahm $\delta.PM$ mit wachsender Capacität zu, und ein Maximum wurde bei grösseren Widerständen im Condensatorzweig schon bei der kleinsten Capacität (0,1 Mikrofar.) erreicht. In der gleichen Weise verhieilt sich auch das $\delta.PM$ eines Drahtbündels, als man das Verschwinden seines inducirten Momentes durch Ausfüllung der Zwischenräume zwischen den Drähten mit Quecksilber ver-

zögerte. Bei dem Eisenstab trat eine kleine Zunahme von $\delta.PM$ mit wachsender Capacität ein.

g) Legt man in den Condensatorzweig statt getheilter Siemens'scher Rheostatenwiderstände eine bifilar gewickelte Rolle, deren beide Drähte verschieden geschaltet und auch einzeln benutzt werden können, so erhält man bei einem Eisen-drahtbündel im Vergleich zum Widerstande der Rolle zu grosse $\delta.PM$, wenn sie auf kleine Selbstinduction, meist zu grosse, manchmal aber auch zu kleine und immer sehr schwankende Werthe, wenn sie auf grosse Selbstinduction geschaltet ist, und zu kleine Werthe, wenn nur einer ihrer Drähte benutzt wird.

h) Ein grosser, ungetheilter, nach Chaperon'schem Verfahren gewickelter Widerstand verhält sich wie die äquivalente Summe von kleinen Siemens'schen Widerständen. Die Unterschiede zwischen Siemens'schen getheilten Widerständen und Chaperon'schen einerseits und Siemens'schen ungetheilten andererseits, sowie zwischen der Schaltung einer Rolle mit und ohne Selbstinduction werden in dem Maasse kleiner, wie man das Verschwinden des Magnetismus des Drahtbündels verzögert.

i) Das resultirende permanente Moment zeigt Verschiedenheiten des Zustandes. Derselbe ist bei einem Drahtbündel ein anderer vor oder nach einem Maximum und Minimum von $\delta.PM$, nach Einschaltung eines getheilten oder eines ungetheilten Siemens'schen Rheostatenwiderstandes oder einer nach Chaperon gewickelten Rolle, nach Einschaltung einer bifilar gewickelten Rolle, wenn in ihren Drähten der Strom in der gleichen oder entgegengesetzten Richtung verläuft, oder nur eines Drahtes derselben. Auch bei dem Stahlstab deuten die Beobachtungen auf das Vorhandensein von Zustandsverschiedenheiten des permanenten Magnetismus.

Der grösste Theil dieser Resultate erklärte sich, wenn man die Eigenschaften der Selbstinduction und der electrostatischen Capacität der benutzten Rollen, das unter verschiedenen Bedingungen verschieden rasche Verschwinden des inducirten Magnetismus und die dadurch bedingte Verschiedenheit im Ablauf des Extrastromes, sowie die Möglichkeit oscillatorischer Electricitätsbewegungen in Rücksicht zog. Das Verhalten

Siemens'scher bifilar gewickelter Widerstände wurde unter der Annahme verständlich, dass sie schon von dem Werthe 500 S. E. an eine sehr merkliche electrostatische Capacität besitzen, dasjenige Chaperon'scher dagegen nöthigte zu der Annahme, dass sowohl ihre Capacität wie ihre Selbstinduction noch bei Stücken von 3000 S. E. unmerklich sind, wie auch schon in der vorhergehenden Abhandlung geschlossen wurde. Selbstinduction und Capacität einer Rolle beeinflussten bei der jetzigen Versuchsanordnung die Grösse des permanenten Moments in entgegengesetzter Richtung.

Giessen, Mathem.-physik. Cab. d. Univ., Nov. 1894.

2. Ueber electromagnetische Zugkraft; von Max Weber.

Auf einen im magnetischen Felde befindlichen magnetisirbaren Körper wirkt eine Zugkraft in der Richtung der Kraftlinien. Ausser dieser gewöhnlich nur in Betracht gezogenen Kraft wirkt jedoch auch noch eine solche senkrecht zu den magnetischen Kraftlinien. Letztere Kraft ist bei den stark magnetisirbaren Substanzen, wie Eisen, Cobalt, Nickel, bedeutend geringer als die erstere¹⁾; bei diamagnetischen Körpern ist das Verhältniss umgekehrt.²⁾ Bei schwach magnetischen oder diamagnetischen Flüssigkeiten sind die Kräfte nach beiden genannten Richtungen gleich gross, wie auch die Untersuchungen von Quincke „Ueber Messung magnetischer Kräfte durch hydrostatischen Druck“³⁾ ergeben haben. Ueber die Grösse des magnetischen Zuges in Richtung der Kraftlinien beim Eisen sowie dessen Abhängigkeit von der magnetischen Feldstärke sind Messungen ausgeführt worden von Shelford Bidwell⁴⁾ und von Bosanquet⁵⁾ durch Bestimmung der Tragfähigkeit von Electromagneten. Da von ihnen eine anderweitige Bestimmung der Magnetisirungszahl α der untersuchten Eisensorte nicht ausgeführt worden ist, so kann man die Zulässigkeit der benutzten Formel noch nicht als bewiesen betrachten. Für Feldstärken von 400, 1600, 3730 C.G.S-Einheiten sind auch von Quincke⁶⁾ Messungen der magnetischen Zugkraft,

1) G. Quincke, Tagblatt der 62. Vers. deutscher Naturforscher und Aerzte in Heidelberg. p. 210. 1889.

2) G. Adler, Wiener Berichte. **100.** p. 911. 1891.

3) G. Quincke, Wied. Ann. **24.** p. 347—416. 1885.

4) S. Bidwell, Proc. Roy. Soc. **40.** p. 486; Electrician **17.** p. 136. 1886; Eine eingehende Kritik dieser Versuche vgl. bei du Bois, Magnetische Kreise. p. 168. Berlin 1894; ferner: Threlfall und Martin, Elektrotechnische Zeitschr. **15.** p. 494. 1894; Phil. Mag. **38.** p. 89ff. 1894, vgl. auch Feldmann, Wechselstrom-Transformatoren p. 8. Leipzig 1894.

5) Bosanquet, Electrician **13.** p. 83. vgl. auch Ewing, Magnetische Induction in Eisen und verwandten Metallen. p. 232. Berlin 1892.

6) G. Quincke, Tagbl. Naturf. Vers. p. 209. 1889.

sowohl parallel, als auch senkrecht zu den Kraftlinien ausgeführt worden. Die gefundenen Zahlenwerthe sind von G. Adler (l. c. p. 908) in betreff ihrer Uebereinstimmung mit den theoretischen Formeln eingehend discutirt worden. Eine Curve für die Abhängigkeit der Zugkraft von der Feldstärke lässt sich jedoch aus diesen Zahlen nicht construiren, da sich die Messungen nur auf hohe Feldstärken beziehen, bei denen die Magnetisirung schon nahezu constant ist.

In Folgendem habe ich für eine Reihe, sowohl aufsteigender wie abnehmender magnetisirender Kräfte (H), die zugehörige Zugkraft (p) bestimmt; aus je zwei zusammengehörigen Werthen p und H wurde dann die Intensität der Magnetisirung (J) berechnet und für die Beziehung zwischen J und H eine Curve gezeichnet. Ferner wurde noch nach einer anderen (magnetometrischen) Methode eine Curve (für J und H) construirt. Aus der Uebereinstimmung beider Curven ergiebt sich die Berechtigung der bei der ersten Methode benutzten Formel zur Berechnung von J aus der Zugkraft p .

Versuchsanordnung.

Die benutzte Versuchsanordnung war im wesentlichen dieselbe, wie die bereits von Dr. Paul Meyer¹⁾ angewendete.

Der zu untersuchende Eisendraht CC' (Fig. 1) war an zwei Seidenfäden ACB und $A'C'B'$ so horizontal aufgehängt, dass er sich leicht in seiner Längsrichtung verschieben liess. Um gerade gestreckt zu bleiben, befand sich der Draht fast seiner ganzen Länge nach in einer Glashöhre. Die beiden Aufhängefäden waren an je einem Ende B und B' fest gebunden, die anderen Enden A und A' waren um je einen drehbaren

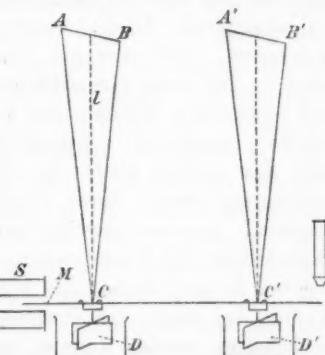


Fig. 1.

Wirbel, wie sie zum Befestigen der Violinsaiten benutzt werden,

1) P. Meyer, Dissert. Heidelberg 1889 und Electrotechn. Zeitschr. 10. p. 582—587. 1889.

geschlungen, sodass sich der Draht CC' durch Drehen der Wirbel heben und senken liess. Um ein Hin- und Herpendeln des Drahtes möglichst zu verhindern, sind an demselben zwei Dämpfer D und D' aus Glimmer befestigt, welche in je ein Gefäss mit Wasser eintauchen. Um ferner der Längsverschiebung des Drahtes eine passende Grösse zu geben, wurden in der Nähe der Unterstützungspunkte C und C' Bleigewichte von geeigneter Grösse angehängt. Von diesem zu untersuchenden Draht, dessen Länge 89,9 cm, dessen Durchmesser 0,0898 cm betrug, ragte das eine Ende in eine Magnetisirungsspirale S in axialer Richtung hinein und wurde bei Erregung der Spirale mit einer gewissen Kraft weiter hineingezogen. Beträgt hierbei die Längsverschiebung des Drahtes s cm, ist G das Gesammtgewicht des Eisendrahtes mit Glasrohr, Bleigewichten und den in Wasser gewogenen Dämpfern, bezeichnet l cm die Länge der Aufhängung von C bis zur Mitte von AB , so ist die Zugkraft:

$$p = G \cdot \frac{s}{l} \text{ (Gramm)} = G \cdot g \cdot \frac{s}{l} \text{ (Dyn)},$$

wo $g = 981 \text{ cm/sec}^2$ die Gravitationsconstante ist. Damit bei der Verschiebung, die bis gegen 60 mm betrug, das Ende des Drahtes möglichst an derselben Stelle in der Mitte der Magnetisirungsspirale blieb, wurde letztere immer soweit nachgeschoben, dass eine am Drahte befindliche Marke M sich stets in der einen Grundfläche der Spirale befand. Um auch bei schwachen Kräften die Verschiebung genau ablesen zu können, wurde ein schwach vergrösserndes Ablesemikroskop auf das andere Ende des Drahtes eingestellt. Die Vergrösserung wurde durch Verändern der Tubuslänge so abgepasst, dass von der im Ocular befindlichen Theilung zehn Scalentheile auf 1 mm gingen, sodass 0,1 mm direct abgelesen werden konnte. Damit das Ablesemikroskop auch für stärkere Kräfte, bei denen das Drahtende aus dem Gesichtsfelde ging, beibehalten werden konnte, war an dem beobachteten Ende des Drahtes ein 6 cm langes Stück Papierscala befestigt. Mit Hülfe derselben wurden die ganzen Millimeter direct, die Bruchtheile des Millimeter mit der Ocularscala abgelesen.

Für Magnetfelder unter 100 C.G.S.-Einheiten wurde eine 42,5 cm lange Spirale mit einem inneren Durchmesser von

etwa 5,0 cm benutzt, welche $2 \times 149 = 298$ Windungen von 2,3 mm dickem Kupferdraht enthielt. Ihre magnetisirende Kraft war daher:

$$H = \frac{4\pi}{10} \cdot \frac{298}{42,5} \cdot i = 8.810 i,$$

wo i der durch die Spirale fliessende Strom in Amperes ist. Die Stromstärke wurde gemessen mit einer Deciamperewage von Lord Kelvin, welche 0,1—10 Ampere abzulesen gestattet. Den Strom lieferte eine Accumulatorenbatterie, von welcher sich mittelst eines Zellenschalters Strom von 1—12 Accumulatoren entnehmen liess. Im Stromkreis befand sich außerdem noch ein Ruhmkorff'scher Commutator und ein Kurbelrheostat (sogenannter Hauptstromregulator).

Der in die Magnetisirungsspirale hineinragende Eisendraht wurde nun einem vollständigen Kreisprocess unterworfen, indem die magnetisirende Kraft (H) zuerst von einem Maximum durch Null hindurch bis zu einem Minimum von derselben absoluten Grösse, wie der Anfangswert, stufenweise abnahm und sodann wieder anstieg bis zum ursprünglichen Maximum.

Hierbei wurden für eine Reihe von magnetisirenden Kräften (H) die zugehörigen Zugkräfte (p) für die Querschnittseinheit (cm^2) bestimmt. Die zusammengehörigen Werthe von p und H sind in Tab. 1 angegeben. Um aus p und H die Intensität der Magnetisirung J berechnen zu können wurde angenommen, dass von dem 89,9 cm langen magnetisirten Eisenstab sich der eine Pol in der Mitte der 42,5 cm langen Spirale befand, während der andere soweit entfernt war, dass die Einwirkung der Spirale auf ihn vernachlässigt werden konnte. Es wurde ferner angenommen, dass die wahre magnetisirende Kraft mit der ursprünglichen, bei Abwesenheit des Drahtes vorhandenen, übereinstimmt. Auf einen freien beweglichen Pol m wirkt nun in einem Magnetfelde H die Kraft $f = m \cdot H = r^2 \pi J \cdot H^1$), wo $r^2 \pi$ der Querschnitt des Magnetstabes ist. Die auf die Flächeneinheit (cm^2) wirkende Zugkraft $f/r^2 \pi = p$ ist daher

$$p = J \cdot H.$$

1) Vgl. Ewing, Magnet. Induction p. 8. § 8.

Tabelle 1.

Zugkraft p Dyn cm ²	Feldstärke H cm ^{-1/2} g ^{1/2} sec ⁻¹	Magnetisirung $J = \frac{p}{H}$
78410	74,01	1059
59910	57,69	1039
48810	47,42	1029
43710	43,01	1016
19660	20,61	954
10640	11,32	940
0	0	[914] interpolirt
— 1966	— 2,158	+ 911
— 2163	— 2,390	906
— 2320	— 2,850	814
— 2557	— 3,356	762
— 2557	— 4,439	576
— 1377	— 6,039	228
— 590	— 7,120	+ 82,8
+ 3932	— 11,32	— 348
11610	— 18,46	— 629
25650	— 30,88	— 845
40910	— 43,24	— 946
76570	— 72,91	— 1051
46290	— 44,43	— 1042
31230	— 30,52	— 1023
28870	— 28,72	— 1006
20610	— 20,65	— 998
10770	— 11,35	— 949
+ 5679	— 6,00	— 947
0	0	[— 879] interpolirt
— 1966	+ 2,331	— 844
— 2183	2,698	— 809
— 2360	3,052	— 773
— 2458	3,309	— 743
— 2360	4,519	— 522
— 1278	6,094	— 210
+ 7079	13,87	+ 511
14520	20,68	702
21430	26,61	806
47300	47,28	1000
77280	73,30	1054

Nach dieser Formel sind die Werthe J in Tab. 1 berechnet und die Beziehung zwischen J und H wird veranschaulicht durch die punktierte Curve in Fig. 2.

Der für p angegebene Ausdruck stimmt jedoch nicht

überein mit dem von G. Adler¹⁾ für die benutzte Anordnung unter Berücksichtigung der Veränderlichkeit der Magnetisierungszahl χ berechneten Ausdruck

$$p = J_1 \cdot H_1 - \int_0^{J_1} \frac{J \cdot dJ}{\chi}.$$

Um das Integral auszuwerthen, müsste man nach Adler (l. c. p. 906) für die betreffende Eisensorte eine empirische Formel zwischen J und χ , wie sie z. B. von Stefan aufgestellt ist, zu Grunde legen; mir scheint jedoch eine geometrische Betrachtung bequemer zu sein, um den Einfluss des Integrals auf den Werth von p zu übersehen. Es möge die Curve OAB (Fig. 3) die Beziehung zwischen J und H für die untersuchte Eisensorte darstellen. Da nun $J = \chi H$ ist, so ist

$$\int_0^{J_1} \frac{J dJ}{\chi} = \int_0^{J_1} H dJ,$$

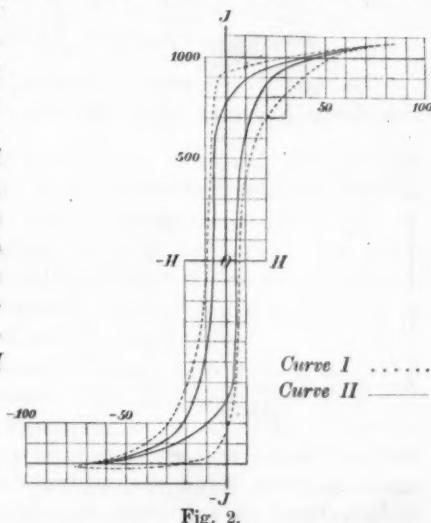


Fig. 2.

also gleich dem Inhalt der Fläche $OABJ_1O$. Mithin ist p gleich dem Flächeninhalt $OABH_1O$. Für grosse H ist $J_1 H_1$ oder $O H_1 B J_1 O$ gross gegen den Werth des Integrals, da J , also auch die Fläche $OABJ_1O$, nahezu constant bleibt bei grossen Werthen H . In diesem Falle wäre nahezu $p = J \cdot H$.

Bei Substanzen mit constanter Magnetisierungszahl χ ist statt der Curve OAB eine Gerade OB zu setzen. In diesem Falle ist, wie geometrisch leicht zu ersehen

$$p = \frac{J_1 H_1}{2} = \frac{\chi}{2} H^2,$$

1) G. Adler, Wiener Berichte. 100. p. 897. 1891.

welchen Werth man vielfach für die Zugkraft p angegeben findet.

Nach Maxwell¹⁾ ist die Zugkraft in der Richtung der Induction zu setzen gleich

$$p = \frac{1}{4\pi} B \cdot H - \frac{1}{8\pi} H^2.$$

Unter der Annahme, dass die Induction B nur von der magnetisirenden Kraft H herrührt und dass remanenter Magnetismus von früheren Magnetisirungen nicht vorhanden ist, ist $B = \mu \cdot H = (1 + 4\pi\chi)H$. Dies eingesetzt ergibt

$$p = \left(\chi + \frac{1}{8\pi}\right) H^2.$$

Da man $1/8\pi$ gegen χ vernachlässigen kann, so deckt sich dieser Ausdruck von p mit dem oben benutzten

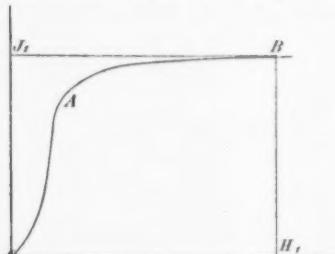


Fig. 3.

$$(p = J \cdot H = \chi H^2).$$

Um nun festzustellen, wie weit die Berechnung der in Tab. 1 angegebenen Werthe für J nach der benutzten Formel berechtigt ist, habe ich J als Function von H auch noch nach der „unipolaren“ magnetometrischen Methode²⁾ bestimmt.

Der im Vorigen benutzte Eisendraht wurde in verticaler Lage östlich von einer Wiedemann'schen Bussole, 37,6 cm von der Nadel entfernt, so aufgestellt, dass das untere Ende in gleicher Höhe mit der Galvanometernadel lag. Der Draht ist umgeben von der 42,5 cm langen Spirale, deren unteres Ende ebenfalls in der Höhe der Nadel lag. Die von der Spirale allein herrührende Ablenkung wurde durch eine zweite Spirale compensirt. Aus der durch den magnetisirten Eisenstab hervorgerufenen Ablenkung ergiebt sich dann in einfacher Weise die Polstärke des Stabes und somit auch J . In Tab. 2 und in Curve II (Fig. 2) sind die Resultate der Beobachtung dargestellt.

1) Maxwell, Treatise 2. § 642; vgl. auch du Bois, Magnet. Kreise p. 161. 1894.

2) Ewing, l. c. § 40 p. 40.

Tabelle 2.

<i>H</i>	<i>J</i>	<i>H</i>	<i>J</i>
85,31	1060	— 84,35	— 1054
67,87	1084	— 27,07	— 898
37,54	992	— 21,47	— 888
17,27	937	— 13,45	— 862
9,03	882	0	— 719
0	760	+ 3,69	— 557
— 4,41	581	4,58	— 222
— 7,63	— 337	5,14	+ 59
— 11,42	— 612	6,04	259
— 18,11	— 787	8,99	563
— 24,04	— 853	13,62	737
— 36,61	— 919	17,88	824
— 84,35	— 1054	21,33	865
		28,63	927
		85,17	1059

Wie man aus den Curven I und II ersieht, unterscheiden sich die Resultate beider Beobachtungsmethoden nur dadurch, dass das Eisen, nach der zweiten Methode untersucht, geringere Coercitivkraft zeigt, wie nach der ersten. Der numerische Werth der Coercitivkraft¹⁾ nach Hopkinson's Bezeichnung (d. i. der Werth von *H*, für welchen *J* = 0 ist) ist im ersten Fall 7,6, im zweiten 5,8 (im Mittel).

Als Grund für dieses Verhalten müsste man annehmen, dass das Eisen im zweiten Falle Erschütterungen ausgesetzt war, die im anderen Falle fehlten. Da schon die leiseste Berührung eines magnetisirten weichen Eisenstabes mit der Hand, besonders bei schwachen Kräften, genügt, um den Magnetismus bedeutend zu verringern²⁾, so könnte man die erwähnten Erschütterungen vielleicht suchen in der, wenn auch nur geringen, zitternden Bewegung der Wände des Gebäudes, welche durch vorüberfahrende Lastwagen verursacht wird, und die sich dem starr mit der Wand verbundenen Eisenstab mittheilten. Bei der ersten Untersuchungsmethode dagegen hing der Eisenstab an 190 cm langen Seidenfäden, welche eine Uebertragung der zitternden Bewegung auf das Eisen verhinderten, zumal da auch noch das Holzgestell, an welchem die Fäden befestigt waren, durch untergelegte Filzscheiben von seiner Unterlage

1) Ewing, l. c. § 47 p. 53.

2) Ewing, l. c. § 64 p. 78.

getrennt war. Da nun nach beiden gezeichneten Curven das Eisen gleiche Magnetisirbarkeit zeigt, so ergiebt sich, dass bei der benutzten Anordnung die auf das Eisen pro Flächeneinheit (cm^2) des Querschnitts wirkende Zugkraft sich durch die einfache Formel $p = J \cdot H = \alpha \cdot H^2$ darstellen lässt.

Tabelle 3.

Verschiebung des Drahtes s/cm	Zugkraft p Dyn/cm^2	Feldstärke H $cm^{-1/2} g^{1/2} sec^{-1}$	Magnetisirung $J = \frac{p}{H}$	Induction $B = H + 4\pi J$
6,05	616500	465,6	1324	17100
4,24	432000	334,9	1290	16550
2,435	248000	203,9	1219	15510
1,32	134500	114,9	1170	14820
0,524	63680	58,25	1093	13800
- 0,02	- 2037	- 4,092	498	6250
0	0	- 7,471	0	- 7,5
+ 0,03	+ 3056	- 10,02	- 305	- 3850
0,065	6622	- 14,56	- 455	- 5725
0,19	19360	- 26,35	- 735	- 9250
0,32	32600	- 39,40	- 828	- 10450
0,74	75390	- 73,18	- 1030	- 13020
1,97	200700	- 169	- 1187	- 15080
3,74	381100	- 300,7	- 1267	- 16220
5,46	556300	- 425,2	- 1308	- 16870
6,06	617500	- 465,6	- 1326	- 17130
5,35	545100	- 417,6	- 1305	- 16820
3,665	373500	- 295,2	- 1255	- 16200
2,02	205800	- 170,1	- 1210	- 15380
0,94	95760	- 85,53	- 1119	- 14160
0,45	54840	- 42,39	- 1081	- 13600
- 0,03	- 3056	+ 4,726	- 647	- 8120
- 0,01	- 1019	9,881	- 103	- 1286
+ 0,065	+ 6622	15,84	+ 418	+ 5268
0,27	27510	33,59	819	10325
0,37	37700	42,59	885	11175
0,91	92700	86,62	1070	13540
2,06	209900	173,2	1212	15500
3,215	327500	259,9	1260	16100
4,87	496200	379,9	1306	16790
5,44	554200	420,9	1317	16970
6,03	614400	461,2	1332	17200

Um die Grösse der electromagnetischen Zugkraft auch bei höheren Feldstärken untersuchen zu können, wurden die Versuche noch mit einer Magnetisirungsspirale wiederholt,

welche bei einer Länge von 15 cm eine magnetisirende Kraft $H = 47,26^1)$ C. G. S. Einheiten bei 1 Ampere Stromstärke besaß. Die mit derselben erhaltenen Resultate sind in Tab. 3 niedergelegt. Hierbei war nach der Bezeichnung von p. 32

$$G = 124,36 \text{ g}; \quad l = 189 \text{ cm}.$$

Die Curve, welche die Tab. 3 veranschaulicht, deckt sich bei kleinen Feldstärken mit der zu Tab. 1. Der nach Tab. 1 erreichte höchste Werth von $J = 1059$ für $H = 74$ liegt zwischen den entsprechenden der Tab. 3. Hier ist für $H = 74$ im aufsteigenden Ast $J = 1020$, im absteigenden $J = 1070$.

Der aus der Zugkraft berechnete grösste Werth von B (rund 17000 bei etwa $H = 460$) ist der allgemein für Eisen angegebene.

Zugkraft senkrecht zu den Kraftlinien.

Zur Erzeugung des magnetischen Feldes diente die oben erwähnte Spirale, bei welcher $H = 47,26 i$ ist, und eine ihr gleiche.

Beide Spiralen standen senkrecht, die eine coaxial über der anderen. Durch zwischen gelegte Holzklötzchen wurden sie in einem Abstande von 3 mm gehalten. Die Feldstärke in der Mitte zwischen beiden Rollen betrug nur 38,62 i , während sie in jeder einzelnen 47,26 i betrug. Zur Bestimmung dieser Feldstärken waren ein Erdinductor sowie eine kleine flache Inductionsspirale, beide von bekannten Windungsflächen, mit einem ballistischen Multiplikator in demselben Stromkreis hintereinander geschaltet. Der Ausschlag, den eine Drehung des Erdinductors um 180° im bekannten magnetischen Felde der Erde gab, wurde verglichen mit dem Ausschlage, den man erhielt, wenn die kleine Inductionsspule aus der stromdurchflossenen Magnetisirungsspirale oder aus dem Zwischenraume zwischen beiden herausgezogen wurde.

In den Zwischenraume zwischen den beiden Spiralen ragte der genau wie früher (Fig. 1) horizontal aufgehängte Draht hinein und wurde bei Erregung des magnetischen Feldes in dasselbe senkrecht zu den Kraftlinien hineingezogen. Vor dem

1) Diese Zahl wurde experimentell bestimmt, wie weiter unten auf dieser Seite angegeben ist.

Versuche wurde der Draht entmagnetisiert durch schnelles Hin- und Hermagnetisiren mit beständig bis Null abnehmenden Kräften. Während bei den früheren Versuchen der Draht sich seiner ganzen Länge nach in einer Glaskugel befand, war hier das in das Magnetfeld hineinragende Ende von dem Glasrohr befreit, damit der Draht in dem engen Zwischenraum zwischen beiden Spiralen mehr Spielraum hatte. Letzterer Umstand hatte jedoch grosse Nachtheile im Gefolge. Bei Erregung des Feldes erfuhr der Draht eine, wenn auch nur geringe, seitliche Verbiegung, sodass er nicht mehr senkrecht zu den Kraftlinien lag. Hätte man dies dadurch vermeiden wollen, dass man das Glasrohr ganz beibehielt, so hätte der Abstand beider Spiralen vergrössert werden müssen. Hierdurch würde aber die erreichbare höchste Feldstärke gleich bedeutend herabgesetzt sein, sodass man auf die Messung kleinerer Kräfte, deren Bestimmung ohnehin ungenau ist, beschränkt gewesen wäre. Die erwähnte Verbiegung war nun bei einem Wechsel in der Richtung der magnetischen Kraftlinien nicht die gleiche nach beiden Seiten. Daher war auch bei positiven und negativen Feldern von gleicher absoluter Stärke die auf den Draht wirkende Zugkraft nicht dieselbe. Aus einer ausführlichen Beobachtungsreihe habe ich durch graphische Interpolation folgende Werthe für p_{\perp} gewonnen.

Tabelle 4.

H	p_{\perp}	H	p_{\perp}
350	13000	-350	10000
300	9550	-300	6900
250	6900	-250	4900
200	4600	-200	2900
150	2650	-150	1500
100	1250	-100	500

Da die in derselben Horizontalreihe stehenden Werthe p_{\perp} hätten gleich sein müssen, so kann man den gefundenen Zahlen nicht viel Bedeutung beimessen. Um jedoch die Zugkräfte parallel (p_{\parallel}) und senkrecht (\perp) zu den Kraftlinien mit einander vergleichen zu können habe ich die Mittelwerthe aus den entsprechenden Zahlen der letzten Tabelle in der nachfolgenden Tabelle 5 angegeben. Die unter p_{\parallel} mitgetheilten Zahlen sind

die aus dem aufsteigenden und absteigenden Ast der Curve zu Tabelle 3 entnommenen Mittelwerthe.

Tabelle 5.

H	$p\#$	p_{\perp}	$\frac{p\#}{p_{\perp}}$
350	452000	11500	39,3
400	382000	8275	46,2
250	311000	5900	52,7
200	242000	3750	64,5
150	180000	2075	86,7
100	117000	875	134

Wie man sieht nimmt das Verhältniss $p\#/p_{\perp}$ schnell ab mit wachsender Feldstärke H .

Es mögen zum Vergleiche noch einige Werthe p_{\perp} angeführt werden, die ich gelegentlich vor einigen Jahren mit einem sehr dünnen Draht (Durchmesser 0,0576 mm) bei sehr hohen Feldstärken (4000—12000 Einheiten) angestellt hatte. Das Feld wurde erzeugt durch einen grossen Electromagneten¹⁾, der bei den Versuchen mit Strömen bis zu 30 Amp. erregt wurde. Die cylindrischen Pole von 24 mm Durchmesser standen sich in einem Abstande von 3,5 mm gegenüber und wurden durch zwischen gelegte Messingstücke von 3,5 mm Dicke in diesem Abstande erhalten. Das Glasrohr, welches den Draht ganz umgab, war an dem Ende, das in den Zwischenraum zwischen den Magneten hineinragte, zu einer feinen Spitze ausgezogen. Um ein seitliches Anlegen des Drahtes gegen die Polflächen zu verhüten waren die Aufhängefäden *A B C* (Fig. 1) stark gespreizt und bei *C* ein oder mehrere Male um das Glasrohr geschlungen. Die Feldstärken wurden gemessen mit einem magnetischen Manometer.²⁾ Die für die Zugkraft senkrecht zu den Kraftlinien gemessenen Werthe sind in Tab. 6 angegeben. Durch graphische Interpolation sind sie für ganze Tausende von H bestimmt. Da mir das seiner Zeit benutzte Drahtstück nicht mehr zur Verfügung steht, so habe ich die Zugkraft parallel den Kraft-

1) Derselbe, der von Quincke, Wied. Ann. 24. p. 359. 1885 als berliner Electromagnet bezeichnet ist. Siehe daselbst auch die ausführliche Angabe aller Dimensionen desselben.

2) Quincke, Wied. Ann. 24. p. 347.—416. 1885.

linien berechnet. Unter der Annahme, dass das Eisen¹⁾ eine mittlere Magnetisirbarkeit (etwa $J_{\max.} = 1330$; $B = 17000$) besitzt, und dass vollständige Sättigung bereits eingetreten war, sind die Werthe $p\#$ der Tabelle 6 nach der Formel $p = J \cdot H$ berechnet.

Tabelle 6.

H	p_{\perp}	$p\# = H \cdot 1330$	$\frac{p\#}{p_{\perp}}$
4000	$222 \cdot 10^4$	$532 \cdot 10^4$	2,40
6000	$448 \cdot 10^4$	$798 \cdot 10^4$	1,78
8000	$780 \cdot 10^4$	$1064 \cdot 10^4$	1,36
10000	$1108 \cdot 10^4$	$1330 \cdot 10^4$	1,20
12000	$1440 \cdot 10^4$	$1596 \cdot 10^4$	1,11

Die älteren Versuche von Quincke²⁾ gaben für $H = 3731$ bei einer anderen Eisensorte $p\#/p_{\perp} = 7,28$. Wie man aus Tab. 5 und 6 ersieht, nimmt für Eisen das Verhältniss $p\#/p_{\perp}$ mit wachsender Feldstärke ab, wie schon Quincke (l. c.) gefunden, und scheint sich der Einheit zu nähern. Sollte die über die Magnetisirbarkeit der zu Tab. 6 benutzten Eisensorte gemachte Annahme nicht genau zutreffen, so würde dadurch der *relative* Verlauf der Zahlenwerthe in der dritten und vierten Verticalspalte der letzten Tabelle nicht beeinflusst werden, da sie alle mit ein und derselben Constanten zu multipliciren wären.

Zusammenfassung der Resultate.

Die Resultate der beschriebenen Versuche lassen sich etwa in folgenden Worten zusammenfassen. 1. Ein im Verhältniss zu seiner Dicke sehr langer Eisendraht, der mit seinem einen Ende in ein Magnetfeld parallel der Kraftlinien hineinragt, erfährt in seiner Längsrichtung eine Zugkraft, die für die Flächeneinheit (cm^2) des Querschnitts die Grösse $p\# = J \cdot H = \alpha H^2$ besitzt. 2. Verlaufen die magnetischen Kraftlinien senkrecht zur Längsrichtung des in das Feld hin-

1) Von der zu den Paalzow-Rubens'schen Dynamobolometern (Wied. Ann. 37. p. 529. 1889) verwendeten Drahtsorte.

2) Quincke, Tagebl. d. Naturf. Vers. Heidelberg p. 210. 1889.

einragenden Drahtes, so ist die Zugkraft senkrecht zu den Kraftlinien beim Eisen kleiner als die Kraft $p_{\#}$. Das Verhältniss $p_{\#}/p_{\perp}$, das bei mittleren Kräften (etwa $H = 100$) grösser als 100 ist, nimmt mit wachsender Feldstärke schnell ab und scheint sich der Einheit zu nähern.

Zum Schlusse sei es mir gestattet, Hrn. Prof. Quincke für seinen Rath und die Unterstützung bei Ausführung dieser Arbeit meinen besten Dank auszusprechen.

Heidelberg, Physikal. Institut, Sept. 1894.

3. Ueber das Leitungsvermögen wässriger Lösungen der Kohlensäure; von W. F. Knox.

(Aus der Strassburger Dissertation.)

In einer von E. Pfeiffer im Jahre 1884 veröffentlichten Arbeit¹⁾ „über die electrische Leitungsfähigkeit des kohlensäuren Wassers und eine Methode, Flüssigkeitswiderstände unter hohen Drucken zu messen,“ befinden sich Untersuchungen über die Leitungsfähigkeit von Lösungen von Kohlensäure in Wasser bei 0° und $12,5^{\circ}$ unter Drucken, welche zwischen etwa 1 Atmosphäre und 25 Atmosphären lagen. Eine Curve für 18° wird aus diesen Zahlen extrapoliert.

Da die Kohlensäure durch ihre unvermeidliche Anwesenheit eine wichtige Rolle in dem Leitungsvermögen des Wassers spielt, so ist gerade die Kenntniss ihrer verdünnten Lösungen von höchstem Interesse.

Vorliegende auf Anregung von Hrn. Prof. F. Kohlrausch unternommene Arbeit befasst sich mit Lösungen unter dem Sättigungsdrucke von etwa $1/40$ bis 2 Atmosphären. Die erzielten Resultate lassen sich mit denjenigen von Pfeiffer vereinigen, sodass nunmehr der ganze Verlauf der Curven von etwa 17 mm Quecksilberdruck bis etwa 25 Atmosphären festgestellt ist.

1. Apparate.

Die Kohlensäure wurde in einem Kipp'schen Apparat aus weissem Marmor und reiner Salzsäure bereitet. Das Gas wurde mit Kaliumpermanganat, alsdann zweimal mit Natriumbicarbonat, endlich mit destillirtem Wasser gewaschen.

In Fig. I ist *E* ein Rohr, welches in ein Capillarrohr *R* ausgezogen war. *E* wurde durch einen Gummipropfen *S* hindurchgeführt, welcher in das Glasstück *T* eingepasst war. *T* bestand aus einem Schliff an seinem unteren Ende und einer glockenartigen Erweiterung an seinem oberen Ende und war auf den Schliff *V* aufgepasst. Capillarrohr *R* reichte mit seinem

1) E. Pfeiffer, Wied. Ann. 23. p. 625. 1884.

Ende, nachdem T auf V aufgeschoben war, durch den Dreiehahn F hindurch bis zum Boden des Messgefäßes H .

Die Kohlensäure wurde durch *ER* geleitet und durch das in *H* befindliche Untersuchungswasser hindurchgetrieben. Da Cylinder *J*, dessen Durchmesser 3 cm und dessen Länge 13 cm betrug, mit Quecksilber angefüllt, und *T* mittels des Gummipropfens hermetisch

verschlossen war, blieb der Kohlensäure nur der einzige Ausweg durch den Ausläufer G des Dreieghahnes F hindurch.

Der innere Durchmesser des Gefäßes H , in welchem sich die Electroden befanden, betrug 2 cm, die Höhe desselben 7 cm.

Da durch den Druck der Kohlensäure sich im Unter-

suchungswasser Bläschen bilden, welche als Wassertropfen in die Röhren hineingetrieben werden, so wurden auf beiden Seiten die kugelartigen Erw-Tropfen aufzusammen

Die Oeffnung Y wurde in Verbindung mit einem in ein Manometer umgestalteten Jolly'schen Luftthermometer gesetzt. Der Cylinder J war dazu bestimmt, Quecksilber aufzunehmen, um einen beliebigen Druck in Gefäss H herzustellen, welcher alsdann auf der Luftthermometerscala abzulesen war.

Kugel *Z* hat den Zweck, Luftbläschen aufzusammeln,

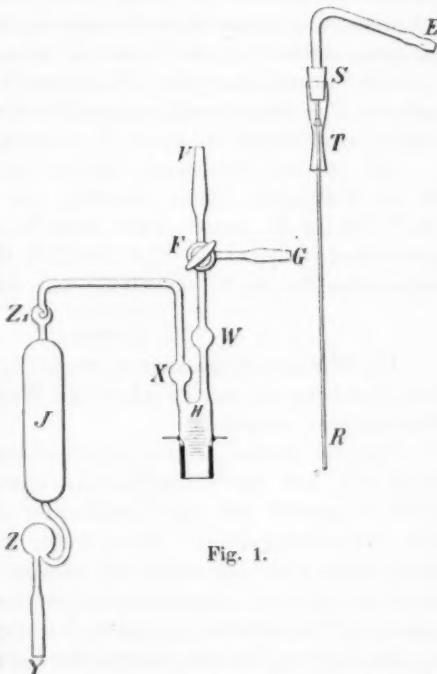


Fig. 1.

welche möglicherweise aus dem Gummischlauche des Luftthermometers aufsteigen könnten.

Die kugelartige Erweiterung Z_1 , in welcher sich eine hakenförmige Glasspitze befand, war dazu bestimmt, etwaige Quecksilberkugelchen, welche an den Wänden des Cylinders J nach Entleerung des Quecksilbers und Umdrehen des Apparates während der Reinigung desselben möglicherweise haften geblieben sein könnten, aufzunehmen und ein weiteres Vordringen derselben in das Gefäss H unmöglich zu machen.

Die Ermittlung der Widerstandscapacität des Messgefäßes H erfolgte durch concentrirte Gypslösung, für welche (Hg 0° als Einheit) $10^7 k = 1,77 + 0,045 (t - 18)$ ist¹⁾.

Bis zu dem Theilstrich, welcher immer als Höhenmarke für die Flüssigkeit diente, eingefüllt gab diese Flüssigkeit bei 18,2° 190,1 S. E., später, nach einer Reparatur des schadhaft gewordenen Gefäßes bei 17,4° 194,3 S. E. Daraus folgen die Capacitäten für Hg 0° 0,0000338 bez. 0,0000350 S. E.

2. Versuche.

Die Widerstandsmessungen wurden nach der Methode von Prof. Kohlrausch mit Telephon und Wechselströmen an einer Walzenbrücke ausgeführt.

Um das Gefäss H mit Untersuchungswasser anzufüllen, wurde ein mit einem Capillarrohr versehener Trichter auf Schliff V gesetzt und das Capillarrohr durch den Dreiweghahn F hindurchgeführt. Zuvor wurde jedoch Quecksilber in den Cylinder J hineingebracht bis beinahe an die Verengerung zwischen J und Z_1 . Ausläufer G des Dreiweghahnes F wurde alsdann in Verbindung mit einer Wasserluftpumpe gebracht, um das in den Trichter eingeführte Untersuchungswasser in das Gefäss H hineinzutreiben. Nach Füllung des Gefäßes mit Untersuchungswasser wurde der Trichter abgenommen und T auf V gesetzt. Rohr E wurde mit der Waschflasche B_4 (Fig. 2) verbunden, welche wieder mittels eines Dreiweghahnes D mit der Waschflasche B_5 und einem cylindrischen Rohr C in Verbindung stand. Dabei wurde der Hahn D so gestellt, dass die Waschflaschen B_1 , B_2 , B_3 ausgeschaltet blieben.

1) Kohlrausch und Rose, Wied. Ann. 50. p. 133. 1893.

Waschflasche B_5 wurde mit einer starken Kalilauge gefüllt. In C befanden sich Aetzkalistücke. Beide haben den Zweck, die Kohlensäure aus der Luft zu entfernen. Diese so gereinigte Luft wurde mittels einer an Ausläufer G angebrachten Wasserluftpumpe durch das Untersuchungswasser getrieben, um in demselben enthaltene Kohlensäure gleichfalls zu entfernen.

Als das Leitungsvermögen im Untersuchungswasser sich constant zeigte, wurde mittels des Hahnes D der Kipp'sche Apparat sammt den Waschflaschen eingeschaltet und Kohlensäure durch das Untersuchungswasser getrieben, bis das Leitungsvermögen sich ebenfalls constant zeigte, was gewöhn-

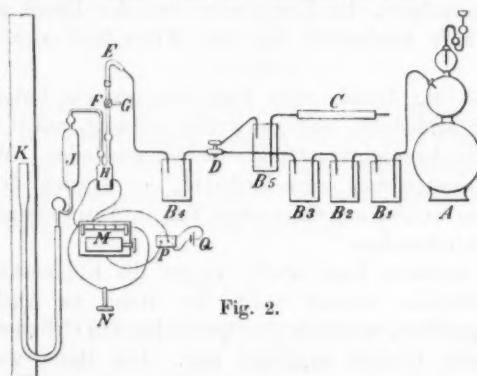


Fig. 2.

lich nach etwa 60 Minuten der Fall war. Während dieser Zeit wurde zuerst die Wasserluftpumpe von G entfernt, dann wurde G mit einem grossen cylindrischen Gefäss in Verbindung gebracht. Dieses Gefäss füllt sich allmählich mit der aus Ausläufer G fliessenden Kohlensäure an. Es wurde dann das Quecksilber aus J langsam herausgelassen, wodurch sich die Kugeln W und X (Fig. 1) mit einem Gemisch von Kohlensäure und Luft anfüllten.

Wenn hierbei etwa das Quecksilber zu schnell aus J abgelassen wurde, so diente also das in Verbindung mit G angebrachte Gefäss als Reservoir für Kohlensäure. Nachdem das Quecksilber unten an dem Gefäss angelangt war, wurde wieder Quecksilber durch den Cylinder J getrieben.

Dieses Verfahren wurde wiederholt, bis sich im Apparat nur Kohlensäure befand. Alsdann wurde das Capillarrohr *R* vorsichtig aus dem Gefäss herausgehoben, und der Hahn *F* geschlossen. Die Kohlensäure im Apparat stand unter Barometerdruck. Die Messungen wurden in folgender Weise ausgeführt:

Es wurde zunächst der Druck im Apparat allmählich durch Erhöhung des Quecksilbers in *J* jeweilig etwa 250 mm, stufenweise bis schliesslich auf etwa 1500 mm gesteigert. Nach Verstärkung des Druckes wurde das Untersuchungswasser im Gefäss etwa 10 Minuten heftig geschüttelt. Wenn alsdann die Temperatur wieder constant war, wurden das Leitungsvermögen, die Temperatur und der Druck gemessen. Dieses wurde wiederholt, bis der Widerstand sich constant zeigte.

Wenn der Druck etwa 1500 mm erreicht hatte, wurde er wieder erniedrigt, und es wurde versucht, annähernd dieselben Gleichgewichtszustände wiederherzustellen. War man zum Barometerdruck zurückgekehrt, so wurden die Untersuchungen, welche ungefähr einen Tag in Anspruch genommen hatten, unterbrochen.

Am nächsten Tage wurde zuerst die Kohlensäure unter Druck gebracht; hierauf wurde der Hahn an Ausläufer *G* langsam geöffnet, wodurch das Quecksilber in Cylinder *J* stieg, bis derselbe beinahe angefüllt war. Der Hahn wurde abgedreht und der Druck um etwa 250 mm unter Barometerdruck vermindert; hierauf wurden die Untersuchungen wie oben wieder aufgenommen.

Nach Eintreten des Gleichgewichtszustandes wurde der Druck etwas erhöht und das Untersuchungswasser geschüttelt, bis ein lauter Ton im Telephon hörbar wurde. Es wurde dann wie früher der Versuch gemacht, den Druck auf den ursprünglichen Betrag zurückzubringen. Nach Sinken des Quecksilbers bis zum unteren Theil des Gefäßes wurde, um weitere niedrige Drucke zu erzielen, die Wasserluftpumpe in Thätigkeit gesetzt, wodurch Kohlensäure entfernt und das Quecksilber in Cylinder *J* zum Steigen gebracht wurde. Sobald eine genügende Erniedrigung des Druckes stattgefunden hatte, wurde der Hahn *F* wieder geschlossen.

Schliesslich wurde die Pumpe entfernt und der Hahn *F* langsam geöffnet, um Luft in den Apparat eindringen zu lassen. Das Stück *T* wurde auf *V* gesetzt, *E* mit *B*₄ und den Kalilaugengefässen verbunden und Luft mittelst der an *G* angebrachten Wasserpumpe durch das Untersuchungswasser getrieben; dieses Durchtreiben der Luft wurde fortgesetzt, bis ein Gleichgewichtszustand herrschte.

Die Erfahrung zeigte, dass das Leitungsvermögen des Wassers, welches zwischen $10^{10} k = 0,95$ und 2 lag, nach Beendigung des Experimentes sich um 0,7—1,7 erhöht hatte. Auf diese Erhöhung werde ich am Schlusse der Arbeit nochmals zurückkommen.

3. Resultate.

Die folgenden zwei Tabellen I und II geben die erzielten Resultate von zwei Untersuchungsreihen an, nach abnehmenden Drucken geordnet. Spalte *P* bezeichnet den Druck in Millimetern, *t* die Temperatur und *k* die beobachtete electrische Leitfähigkeit mit 10^{10} multiplicirt.

Tabelle I.

Exp. Reihen- folge	*	<i>P</i>	<i>t</i>	<i>k</i> _{<i>t</i>}	Exp. Reihen- folge	*	<i>P</i>	<i>t</i>	<i>k</i> _{<i>t</i>}
		mm	0				mm	0	
4	△	1501,7	12,34	53,97	10	▽	525,5	11,85	31,95
5	▽△	1495,9	12,53	54,06	12	▽	352,0	12,82	26,36
6	▽	1286,4	12,53	50,26	13	△▽	351,6	12,92	26,36
3	△	1281,2	12,35	49,92	14	▽	249,4	12,63	22,17
7	▽	1025,6	12,53	44,98	16	△▽	143,3	12,45	16,71
2	△	1012,1	12,05	44,40	15	▽	143,0	12,53	16,71
1	—	762,4	11,65	38,54	17	▽	77,3	12,45	12,43
8	▽	750,3	13,22	38,63 ¹⁾	18	△▽	76,7	12,73	12,43
9	—	738,8	11,86	36,57	19	▽	26,5	12,63	7,74
11	△▽	531,0	12,15	32,21	20	▽	17,7	12,73	6,60

¹⁾ ▽ Druck erhöht; △ Druck erniedrigt; ▽△ Druck erhöht und dann erniedrigt. — Keine künstliche Änderung.

1) Wegen einer Beobachtungsstörung sind diese Zahlen und die hiervon abgeleiteten Werthe nicht zuverlässig.

Tabelle II.

Exp. Reihen- folge	*	P	t	k _t	Exp. Reihen- folge	*	P	t	k _t
		mm	0				mm	0	
4	Λ	1449,0	18,20	58,14	12	∨	844,8	17,78	27,91
5	∨Λ	1449,0	18,05	58,08	13	∨Λ	842,1	17,83	27,81
6	∨	1239,4	18,05	53,47	15	Λ∨	247,6	17,93	23,69
3	Λ	1237,1	17,98	53,49	14	∨	243,7	17,88	23,47
2	Λ	994,0	17,88	48,08	18	Λ	149,6	17,95	18,67
7	∨	987,3	18,05	47,85	16	∨	146,0	17,95	18,20
1	—	748,4	17,78	41,55	17	Λ∨	143,1	17,95	18,24
9	—	726,9	17,44	40,48	20	ΛΛ	63,6	17,95	12,33
8	∨	726,0	17,34	40,62	19	∨	63,5	17,95	12,25
10	∨	506,3	17,59	33,87	21	∨	16,6	17,93	6,67
11	∨Λ	497,7	17,73	33,56	22	Λ∨	16,6	17,93	6,73

Aus obigen beiden Zahlenreihen wurden alsdann die Leistungsfähigkeiten für genau $12,5^{\circ}$ und $18,0^{\circ}$ berechnet, sowie der Kohlensäuregehalt Q , welcher, wie bei Pfeiffer, die von 1 ccm aufgenommenen, auf 0° und 760 mm reducirten Volumina in Cubikcentimeter bedeutet.

Die Reduction der Beobachtungen auf eine constante Temperatur geschah folgendermaassen: Mit der Temperatur t ändern sich gleichzeitig k und Q ; es ist also:

$$\frac{dk}{dt} = \frac{\partial k}{\partial t} + \frac{\partial k}{\partial Q} \frac{\partial Q}{\partial t}.$$

Nun ist, wie wir weiter unten sehen werden, für CO_2 in schwacher Lösung das Leistungsvermögen sehr nahe proportional der Quadratwurzel aus der Concentration, also:

$$k = c \cdot \sqrt{Q} \quad \text{und} \quad \frac{\partial k}{\partial Q} = \frac{k}{2Q},$$

daher findet man

$$\frac{dk}{k} = \frac{1}{k} \frac{\partial k}{\partial t} dt + \frac{1}{2Q} \frac{\partial Q}{\partial t} dt.$$

Der Ausdruck $1/2Q \cdot \partial Q/\partial t$ lässt sich mittels der Bunsen'schen Zahlen für $\partial Q/\partial t$ sofort berechnen.¹⁾ Es ist für

$$12,5^{\circ} \quad Q = 1,0835 \quad \frac{\partial Q}{\partial t} = -0,0365,$$

also

1) Bunsen, Lieb. Ann. 93. p. 1. 1855.

$$\frac{1}{2} \frac{\partial Q}{\partial t} = -0,0169.$$

$$18,0^\circ \quad Q = 0,9318 \quad \frac{\partial Q}{\partial t} = -0,0184,$$

also

$$\frac{1}{2} \frac{\partial Q}{\partial t} = -0,0099.$$

$(1/k)(\partial k/\partial t)$ ist der relative Temperaturcoefficient des Leitvermögens bei constantem Gehalt.

In der Arbeit von Pfeiffer befinden sich genaue Angaben über die Temperaturcoefficienten bei hohen Drucken.

Um unsere Temperaturcorrectionen berechnen zu können, wurde ein Kohlrausch'sches, dicht schliessendes Widerstandsgefäß (Nr. 3) so weit mit Wasser angefüllt, dass nach Verschluss desselben nur ein kleines Bläschen sich bilden konnte; durch ein dünnes Röhrchen wurde Kohlensäure bis zum Boden des Gefäßes geleitet.

Das Gefäß befand sich in einem Petroleumbad; die für vier verschiedene concentrirte Lösungen erzielten Resultate sind in der nachstehenden Tabelle III angegeben.

Tabelle III.

Dauer des Durchleit. der CO_2	t_1	k	t_2	k	$\frac{1}{k_{18}} \cdot \frac{\partial k}{\partial t}$
3 min	0		0		
Bei Sättigung	10,19	25,66	20,39	34,10	0,02576
Frische Füllung					
3 min	10,30	19,59	20,97	26,21	0,02546
8 "	10,74	28,48	20,75	37,51	0,02575

Mittel Temp. Coeff.:

$$\frac{1}{k_{18}} \frac{\partial k}{\partial t} = 0,0257 \quad \text{und} \quad \frac{1}{k_{12,5}} \frac{\partial k}{\partial t} = 0,0300.$$

Für eine verdünntere Lösung, nämlich mit dem Leitvermögen $k_{18} = 9,7$ fand Prof. Kohlrausch den Werth

$$\frac{1}{k_{18}} \frac{\partial k}{\partial t} = 0,0259.$$

in Zimmertemperatur merklich constant.

In allen diesen Zahlen sprechen sich regelmässige Aenderungen nicht aus. Es wurden deshalb die obigen Mittelwerthe in unserer Formel in Anwendung gebracht, infolgedessen erhalten die Temperaturcorrectionen um $12,5^{\circ}$ und $18,0^{\circ}$ nachstehende einfache Gestalten:

$$\text{für } 12,5^{\circ} \quad dk = (0,0300 - 0,0169) k \cdot dt = 0,0131 k \cdot dt$$

$$\text{für } 18,0^{\circ} \quad dk = (0,0257 - 0,0099) k \cdot dt = 0,0158 k \cdot dt.$$

Tabelle IVa und V geben die Resultate unserer Untersuchungen an und Tab. IVb zur Ergänzung die Pfeiffer-schen Resultate für $12,5^{\circ}$. Besondere Spalten enthalten die Leitvermögen des Wassers k_w ; darauf folgen die Werthe $k - k_w$, welche man durch Abrechnung des Wassers erhält. Bei Pfeiffer ist das Wasser ($k_w = 5$ bis 6) nicht abgerechnet.

Ueberall ist der Factor 10^{-10} hinzuzufügen.

Den Gehalt an Kohlensäure Q erhält man wie folgt:

Bei $12,5^{\circ}$ absorbirt 1 ccm Wasser 1,0830 ccm CO_2 bei einem Druck von 760 mm.¹⁾ Daher ist bei einem Druck von P Millimeter

$$Q = \frac{1,083}{760} P = 0,001425 P.$$

Bei 18° ist

$$Q = \frac{0,9318}{760} P = 0,001226 P.$$

Tabelle IVa.

Für $12,5^{\circ}$.

Exp. Reihen- folge	k	k_w	$k - k_w$	Q	Exp. Reihen- folge	k	k_w	$k - k_w$	Q
4	54,08	1,66	52,42	2,140	10	32,22	1,87	30,35	0,749
5	54,04	1,70	52,34	2,132	12	26,25	1,93	24,32	0,502
6	50,24	1,73	48,51	1,833	13	26,21	1,97	24,24	0,501
3	50,02	1,63	48,39	1,826	14	22,13	2,00	20,13	0,355
7	44,96	1,76	43,20	1,462	16	16,72	2,07	14,65	0,204
2	44,66	1,60	43,06	1,442	15	16,70	2,03	14,67	0,204
1	38,97	1,56	37,41	1,086	17	12,44	2,10	10,34	0,110
8	38,27	1,80	36,47	1,069	18	12,39	2,13	10,26	0,109
9	37,12	1,83	35,29	1,053	19	7,74	2,17	5,57	0,0378
11	32,32	1,90	30,42	0,757	20	6,60	2,20	4,40	0,0252

1) Vgl. Bunsen, Lieb. Ann. 93. p. 1. 1855.

Tabelle IVb.
(Pfeiffer) Für 12,5°.

<i>k</i>	<i>Q</i>	<i>k</i>	<i>Q</i>	<i>k</i>	<i>Q</i>	<i>k</i>	<i>Q</i>
156,2	20,03	136,3	14,25	102,3	8,44	64,2	3,40
154,2	19,45	134,2	13,89	103,3	7,64	46,4	1,68
144,7	17,75	129,4	13,36	97,7	7,33	46,1	1,67
139,1	15,72	121,3	10,46	96,1	6,73	46,9	1,67
137,6	15,70	115,0	10,38	92,8	6,35	39,5	1,00
136,6	15,17	115,3	9,79	77,0	4,34	37,5	0,95
138,2	15,06	109,4	9,09	73,0	4,15	36,6	0,92

Tabelle V.
Für 18,0°.

Exp. Reihen- folge	<i>k</i>	<i>k_w</i>	<i>k-k_w</i>	<i>Q</i>	Exp. Reihen- folge	<i>k</i>	<i>k_w</i>	<i>k-k_w</i>	<i>Q</i>
4	57,95	1,25	56,70	1,776	12	28,01	1,86	26,15	0,423
5	57,98	1,33	56,65	1,776	13	27,89	1,94	25,92	0,419
6	53,43	1,41	52,02	1,519	15	23,72	2,09	21,63	0,303
3	53,51	1,18	52,33	1,516	14	23,51	2,01	21,50	0,299
2	48,17	1,10	47,07	1,219	18	18,68	2,32	16,36	0,183
7	47,81	1,48	46,33	1,210	16	18,21	2,17	16,03	0,179
1	41,70	1,03	40,67	0,917	17	18,25	2,24	16,01	0,175
9	40,84	1,63	39,21	0,891	20	12,34	2,47	9,87	0,078
8	41,05	1,56	39,49	0,890	19	12,26	2,39	9,87	0,078
10	34,09	1,71	32,38	0,620	21	6,74	2,55	4,19	0,0204
11	33,70	1,79	31,91	0,610	22	6,81	2,62	4,19	0,0204

Die Leitungsfähigkeit des Untersuchungswassers bei 12,5° betrug im Anfang: 1,53 und zum Schluss: 2,20, diejenige bei 18,0° betrug im Anfang: 0,95 und zum Schluss: 2,62.

Die beobachtete Gesammtzunahme für das Leitvermögen des Wassers während einer Beobachtungsreihe wurde auf die einzelnen Beobachtungen nach der Zeit vertheilt.

4. Schlusstabellen und Formeln.

Aus den einzelnen zusammengehörigen Zahlen in Tab. IVa sowie V wurden nun die Mittelwerthe genommen. An Stelle der *Q* sollen aber die entsprechenden Gehalte *m* an Äquivalenten $\frac{1}{2}$ CO₂ im Liter angegeben werden. Es ist

$$m = \frac{Qs \cdot 1000}{22} = 0,0893 Q,$$

wo *s* = 0,001965 die Dichtigkeit der Kohlensäure bei 0° und 760 mm, bezogen auf Wasser, ist.

Die Leitvermögen geben wir dann in gewohnter Weise als Aequivalentleitvermögen $\lambda = k/m$.

Wir wollen den Resultaten gleich eine Prüfung der Beziehung zufügen, welche für andere schlecht leitende Lösungen gilt.

Kohlrausch hatte bemerkt, dass bei Essigsäure und Ammoniak in verdünnter Lösung das Leitvermögen k nahe der Quadratwurzel aus dem Gehalt m proportional ist.¹⁾ Ostwald führte diese Beziehung auf seine Dissociationsformel für wenig dissociirte Stoffe zurück.²⁾

Es ist zu untersuchen, ob bei der Kohlensäure die obige Beziehung ebenfalls gilt, d. h. ob

$$\frac{k}{\sqrt{m}} = a$$

constant ist.

Tabelle VI.

Versuche Nr.	m	$\frac{k}{m}$	a	$\frac{k-k_w}{m}$	a
Temp. = 12,5°					
20	0,00225	2930	139,1	1950	92,7
19	0,00337	2290	133,3	1650	95,9
17. 18	0,00977	1267	125,4	1050	104,0
16. 15	0,0182	917,2	123,8	804,1	108,6
14	0,0317	697,2	124,2	634,1	113,0
12. 13	0,0448	585,8	124,0	542,3	114,8
11. 10	0,0673	480,0	124,5	452,0	117,2
9	0,0940	394,8	121,1	375,3	115,1
1. 8	0,0963	401,6	124,5	383,7	119,1
7. 2	0,1297	345,6	124,4	332,6	119,8
6. 3	0,1634	306,8	124,1	296,5	119,9
4. 5	0,1908	283,4	123,8	274,6	120,0
Temp. = 18,0°					
21. 22	0,00182	3770	159,8	2310	98,3
20. 19	0,00697	1760	147,0	1420	118,4
18. 16. 17	0,0160	1150	145,3	1008	127,5
15. 14	0,0269	878,1	144,0	801,8	131,5
12. 13	0,0376	743,3	144,1	692,7	134,4
10. 11	0,0550	616,4	144,5	584,8	137,1
1. 9. 8	0,0804	512,4	145,3	495,2	140,4
2. 7	0,1085	438,6	144,5	430,5	141,8
6. 3	0,1356	394,3	145,2	384,8	141,7
4. 5	0,1587	365,3	145,5	357,2	142,3

1) Kohlrausch, Wied. Ann. 6. p. 190. 1879.

2) Ostwald, Ztschr. f. physik. Chem. 2. p. 270. 1880.

In sehr grosser Verdünnung entsteht, wie bekannt, bei nicht neutral reagirenden Körpern eine Unsicherheit aus dem eigenen Leitvermögen des Wassers. Zieht man dasselbe ab, so hat man die bekannte Depression, berücksichtigt man es nicht, so entstehen zu grosse Werthe (für $m = 0$ ja $k/m = \infty$). Tab. VI enthält beide Werthe.

Man sieht, wie mit zunehmender Verdünnung die Werthe a wachsen, wenn man das Wasser nicht abrechnet, im anderen Falle kleiner werden. Die ersten Abweichungen sind aber kleiner als die letzteren und beginnen erst bei $m < 0,01$.

Innerhalb derjenigen Grenzen, in denen das Leitvermögen des Wassers gegen das gesamte Leitvermögen klein ist, findet man das Gesetz der Proportionalität mit \sqrt{m} hinreichend nahe bestätigt. Ueber sehr verdünnte Lösungen lässt sich nichts weiter sagen. Die Werthe von Pfeiffer, auf Äquivalentgehalte berechnet, lauten

Tabelle VII.

(Pfeiffer.) Für 12,5°.

m	$\frac{k}{m}$	m	$\frac{k}{m}$
0,0855	443,5	0,9008	127,9
0,1495	311,0	0,9343	129,8
0,3037	211,4	1,2170	108,3
0,3792	197,8	1,3559	101,5
0,6077	157,2	1,5854	91,3
0,7181	149,2	1,7631	88,0
0,8119	134,7		

5. Sättigungs- und Entsättigungsgeschwindigkeit des kohlen-sauren Wassers.

Es ist nicht ohne Interesse, die Aufnahme oder die Abgabe des absorbirten Gases durch einen Strom von Kohlensäure oder von kohlensäurefreier Luft im Wasser mit der Zeit zu verfolgen. Zu den beobachteten Werthen des Leitvermögens in Tab. VIII und IX ist aus den früheren Zahlen, die man graphisch dargestellt hatte, der Kohlensäuregehalt m entnommen.

Tabelle VIII.
CO₂ durchgeleitet.

Zeit in Secunden	$k_{12,5}$	m	Zeit in Secunden	$k_{12,5}$	m
0	1,61	0	90	31,40	0,0635
5	7,80	0,0032	120	31,99	0,0660
10	12,94	0,0107	180	32,64	0,0695
15	16,21	0,0170	240	33,21	0,0720
20	19,69	0,0250	300	33,73	0,0745
25	22,46	0,0330	420	34,56	0,0780
30	24,52	0,0398	540	35,25	0,0805
35	26,14	0,0448	840	36,20	0,0848
40	27,29	0,0483	1440	37,47	0,0910
45	28,13	0,0508	2040	37,95	0,0928
50	28,81	0,0538	2640	38,41	0,0950
55	29,37	0,0555	3660	38,76	0,0970
60	29,85	0,0570	4260	38,68	0,0965
70	30,55	0,0608	4860	37,76	0,0970

Tabelle IX.
Luft durchgeleitet.

Zeit in Secunden	$k_{12,5}$	m	Zeit in Secunden	$k_{12,5}$	m
0	38,76	0,0970	100	10,59	0,0067
5	35,59	0,0825	110	9,18	0,0046
10	32,90	0,0705	125	7,96	0,0033
15	31,68	0,0653	140	6,51	0,0021
20	29,90	0,0575	160	5,38	0,0014
25	27,82	0,0500	190	4,30	0,0008
30	26,27	0,0450	220	3,73	0,0006
35	24,93	0,0405	280	3,24	0,0004
40	22,78	0,0345	400	2,96	0,00035
45	21,78	0,0310	700	2,71	0,0003
50	20,36	0,0268	1300	2,56	0,0003
55	19,14	0,0240	1900	2,41	0,00025
60	18,42	0,0220	2800	2,35	0,00025
70	16,43	0,0175	3700	2,31	0,0002
80	13,85	0,0126	4600	2,31	0,0002
90	11,74	0,0088			

Der Verlauf der Entättigung ist ein genähert logarithmischer.

Das Durchleiten der Luft führt niemals ganz zu dem Anfangsleitvermögen des Wassers zurück. Der Zuwachs des Leitvermögens beträgt hier 0,70. Eine ganz ähnliche Untersuchungsreihe bei 18° ergab Anfangswasser 2,15, höchster Werth 39,15, Schlusswasser 3,09, mithin eine Differenz von 0,94.

Bei der letzteren Untersuchung ist vor Durchleiten der Luft absichtlich eine längere Pause gemacht worden, sodass die ganze Untersuchung über zwei Tage sich erstreckte.

Bei den Versuchen des § 3 betrug die Versuchsdauer ebenfalls etwa zwei Tage. Der Zuwachs betrug bei $12,5^{\circ}$ $2,20 - 1,53 = 0,67$; bei 18° $2,62 - 0,97 = 1,67$.

Blosses Stehen des Wassers im Gefäß änderte dagegen in zwei Tagen das Leitvermögen nicht merklich.

Wir haben also bei allen Versuchen eine schliessliche Aenderung des Wassers von derselben Ordnung. Ganz unmöglich dürfte nicht sein, dass die Kohlensäure dem Wasser eine Veränderung ertheilt, welche durch den Luftstrom nicht wieder zu beseitigen ist.

6. Der Einfluss der atmosphärischen Luft auf das Leitvermögen des Wassers.

In der Arbeit von F. Kohlrausch und A. Heydweiller¹⁾ „Ueber reines Wasser“ haben die Verfasser Wasser aus dem leeren Raum in die Atmosphäre gebracht und die hierbei erfolgende Zunahme des Leitvermögens gemessen.

Da der Druck der atmosphärischen Kohlensäure etwa $3 \cdot 10^{-4}$ Atm. beträgt, so ist der Gehalt des unter Luft befindlichen Wassers an Grammäquivalenten CO_2 bei 18° (p. 19 und 22)

$$m = 0,0893 \cdot 0,9318 \cdot 3 \cdot 10^{-4} = 2,5 \cdot 10^{-5},$$

also

$$10^{10} k_{18} = 145 \cdot \gamma/m = 0,56.$$

Kohlrausch und Heydweiller fanden einen Zuwachs der Leitfähigkeit um etwa $0,6 \cdot 10^{-10}$. Dieses stimmt also nahe mit dem eben berechneten muthmasslichen Einfluss der atmosphärischen Kohlensäure überein.

Zum Schlusse spreche ich den Hrn. Prof. Kohlrausch und Dr. Heydweiller meinen tiefgefühlten Dank aus für das sehr freundliche Entgegenkommen bei der vorliegenden Arbeit.

1) Kohlrausch u. Heydweiller, Sitzungsber. der Berl. Akad., 29. März 1894; Wied. Ann. 53. p. 209. 1894.

4. Verschiedene Formen der multiplen Resonanz; von V. Bjercknes.

(Aus „Öfversigt af kgl. Vetenskaps-Akademiens Förhandlingar“.
Stockholm, 10. October 1894.)

1. Die schönen Versuche, welche Professor Zehnder soeben publicirt hat, scheinen im ersten Augenblicke in zwingender Weise zu dem Schluss zu führen, dass die Strahlen electrischer Kraft, welche ein Hertz'scher Oscillator aussendet, durch ein Gitter spectral zerlegt werden.¹⁾ Dieser Schluss enthält jedoch einen versteckten Fehler, und zwar genau denselben Fehler, den man macht, wenn man aus den Versuchen von Sarasin und de la Rive schliessen will, dass ebenso viele stehende Wellensysteme objectiv vorhanden sind, als Knotensysteme mit Hülfe von Resonatoren beobachtet werden können. Die verschiedensten Versuche können denselben Schlussfehler in täuschendster Weise wieder veranlassen, so dass es von Wichtigkeit ist, auf denselben genau aufmerksam zu sein.

Der Schluss ist auf die jetzt allgemein anerkannte Analogie der electrischen Wellen und der Lichtwellen gebaut. Dabei muss man aber zwei Umstände nicht vergessen, worin ein wesentlicher Unterschied besteht:

- a) Die Lichtwellen werden stetig unterhalten und sind deshalb ungedämpft, die electrischen Wellen werden nicht stetig unterhalten und sind deshalb gedämpft.
- b) Die Lichtwellen werden mit einem indifferenten Instrumente beobachtet, die electrischen Wellen dagegen — in allen Fällen, wo multiple Resonanz vorkommt — mit Resonatoren, die für eine besondere Art der Erregung besonders empfindlich sind.

Diese zwei Eigenthümlichkeiten der Versuchsbedingungen, — ich wiederhole es: die Dämpfung des Hertz'schen Oscilla-

1) L. Zehnder, Messungen mit Strahlen electrischer Kraft (Prisma und Beugungsgitter). Wied. Ann. 53. p. 162. 1894. Besonders p. 172ff.

tors und die Schwingungsfähigkeit des Hertz'chen Resonators — erfordern das Auftreten derjenigen Erscheinungen, welchen zuerst Sarasin und de la Rive, später Zehnder in verschiedenen Formen begegneten.

Ich werde dies unten in einer ganz elementaren Ableitung zeigen, aber in einer allgemeinen Form, welche gleichzeitig für die Versuche von Zehnder und für diejenigen von Sarasin und de la Rive gültig ist. Ohne jede Schwierigkeit kann man dieser Ableitung die Form eines exacten Calcüls geben: die Rechnung findet man in meiner Abhandlung über multiple Resonanz¹⁾ man braucht nur in leicht ersichtlicher Weise die Voraussetzungen und die Bedeutung einzelner Buchstaben zu verallgemeinern.

2. Gedämpfte Wellen aus derselben Quelle, die zu Interferenz gebracht werden, nachdem sie verschiedene Wege zurückgelegt haben, können im allgemeinen nie ihre Wirkungen gegenseitig aufheben. Denn der Gangunterschied der Wellen ist wegen der Dämpfung nothwendig mit einem Intensitätsunterschied verbunden. Hieraus folgt, dass stehende Wellensysteme gedämpfter Wellen nie scharfe Knoten haben können, mit Ausnahme der singulären Knoten, wo der Gangunterschied Null ist, wie z. B. der Knoten in der Ebene eines reflectirenden Spiegels. Ebenso folgt hieraus, dass bei der Gitterdiffraction ein vollständiger Schatten in keinem Azimuth erzeugt wird.

Untersucht man das Feld der interferierenden Wellensysteme mit einem indifferenten Instrumente, so sind die Resultate mit den optischen vollständig vergleichbar, nur dass Knoten und Bäuche, Strahlen und Schatten etwas verwischt erscheinen. Als indifferenten Instrumente darf man Funkenmikrometer, Electrometer, kleine Thermoelemente oder Bolemeterdrähte ansehen, solange dieselben nicht Theile einer Resonatorvorrichtung ausmachen. Denn die eventuellen Eigenschwingungen solcher Instrumente sind meistens von einer ganz anderen Grössenordnung als die Oscillatorschwingungen. Stehende Wellen sind oft mit solchen Instrumenten beobachtet worden, und die erhaltenen „Interferenzkurven“ zeigen immer die erwarteten, ursprünglich deutlichen Maxima und Minima,

1) Bjerknes, Wied. Ann. 44. p. 92.

die bei steigendem Gangunterschied immer undeutlicher werden.

3. Untersuchen wir jetzt das Ansprechen eines *Resonators* im Felde der interferierenden Wellen.

Erstens ist der Resonator natürlich derselben Wirkung unterworfen wie das indifferente Instrument: in den Bäuchen greifen stärkere, in den Knoten schwächere Kräfte an, wodurch natürlich, unter sonst gleichen Umständen, ein stärkeres oder schwächeres Ansprechen erzwungen wird.

Zweitens muss man aber auch erinnern, dass das Ansprechen eines Resonators nicht nur von der Intensität der Impulse abhängt, sondern auch von dem Zeitverlaufe zwischen den successiven Impulsen. Eine positive und eine negative Welle desselben Wellenzuges folgen einander überall im Felde mit einem constantem Zeitunterschied, welches nur dann starke Erregung verursacht, wenn Oscillator und Resonator auf Isochronismus abgestimmt sind. Diejenige Zeit dagegen, welche zwischen dem Eintreffen einer Welle des einen und einer Welle des anderen Wellenzuges verläuft, ist mit dem Gangunterschiede der Wellen von Punkt zu Punkt im Felde veränderlich. Deshalb gibt es nothwendig Gegenden, wo dieser Zeitunterschied gleich der halben Schwingungsdauer des Resonators ist: in solchen werden die Eigenschwingungen am kräftigsten erregt. Ebenso gibt es Gegenden, wo der Zeitunterschied ein Viertel der Schwingungsdauer des Resonators ist, und wo folglich die ganze Kraft der zweiten Welle dazu verbraucht wird, die von der ersten Welle erzeugte Bewegung zu schwächen.

Im allgemeinen hat man also maximale oder minimale Resonatorerregung in zwei Classen von Gegenden zu erwarten: erstens da, wo die interferirenden Oscillatorwellen objective Maxima oder Minima haben; zweitens da, wo der Gangunterschied der Oscillatorwellen ein gerades oder ein ungerades Vielfache der Viertelschwingungsdauer des Resonators ist.

Ist nun der Resonator im Vergleich zum Oscillator stark gedämpft, so sind die objectiv vorhandenen Knoten und Bäuche relativ gut ausgebildet, während der Resonator für die Erregung der Eigenschwingungen relativ wenig empfindlich ist. Der Resonator verhält sich dann wie ein indifferentes In-

strument, welches nur die objectiv vorhandenen Knoten und Bäuche anzeigt.

Wenn dagegen der Oscillator relativ stark und der Resonator relativ schwach gedämpft ist, wie aus leicht ersichtlichen Gründen bei den Hertz'schen Instrumenten meistens der Fall sein wird, so sind die objectiven Knoten und Bäuche der Oscillatorwellen verhältnismässig undeutlich, während der Resonator für jede Erregung der Eigenschwingungen sehr empfindlich ist. Unter diesen Umständen müssen verschiedene Resonatoren, in das System der stehenden Oscillatorwellen hineingebracht, je nach ihrer Schwingungsdauer verschiedene Systeme von Maxima und Minima anzeigen, und alles wird verlaufen, als wären wirklich Wellen aller möglichen Wellenlängen vorhanden. Und bei den Gitterversuchen müssen die verschiedenen Resonatoren in verschiedenen Azimuthen ihr bestes Ansprechen haben, genau als wären die Oscillatorwellen spectral zerlegt.

4. Ist also einmal die Dämpfung des Oscillators und die Schwingungsfähigkeit des Resonators zugegeben, so ist das Auftreten derjenigen Erscheinungen, die man als verschiedene Formen der multiplen Resonanz bezeichnen darf, eine logische Nothwendigkeit. Diejenige Auffassung, dass die Erklärung dieser Erscheinungen ein Coexistiren mehrerer Schwingungen im Oscillator, oder wenigstens eine gewisse Unbestimmtheit der Periode dieses Instrumentes erfordern müsse, beruht also auf einem Fehlschluss. Damit sei nicht gesagt, dass diese Hypothesen widerlegt sind, denn als Nebenursachen könnten z. B. Obertöne mitwirken, ohne dass die rein qualitativen Versuche eine Entscheidung geben könnten, ob das Ansprechen des Resonators auf eine einzige, oder auf zwei zusammenwirkende Ursachen zurückzuführen sei.

Zur definitiven Entscheidung dieser fundamentalen Frage von der Natur der Electricitätsbewegung im Hertz'schen Oscillator scheint es am zweckmässigsten zu sein, nur indifferente Beobachtungsinstrumente zu benutzen, um jede Täuschung durch das Eingreifen der Eigenschwingungen eines Resonators zu vermeiden. Die Interferenzkurven, die man in dieser Weise durch Abmessen von Drahtwellen gefunden hat,

scheinen bis jetzt alle nur auf das Vorhandensein einer einzigen gedämpften Sinusschwingung hinzudeuten.¹⁾

5. Um nachher die Erklärungen der multiplen Resonanz zu prüfen, muss man diese Erscheinung in ihren verschiedenen Formen quantitativ abmessen. Bis jetzt liegt meines Wissens nur ein Versuch in dieser Richtung vor. In einer sehr interessanten Arbeit haben Klemenčič und Czermak die Interferenzcurven festgestellt, die ein mit Secundärspiegel versehener Resonator unter Einfluss der interferirenden Oscillatorwellen giebt.²⁾ Bei der quantitativen Bearbeitung dieser Versuche hat sich aber derselbe verhängnissvolle Fehler eingeschlichen, der bei so vielen qualitativen Betrachtungen vorkommt: der Resonator ist als ein indifferentes Instrument angesehen. In den Formeln ist nämlich die Resonatorbewegung einfach proportional der Kraft der Oscillatorwellen gesetzt, und die Eigenschwingungen sind fortgelassen. Führt man den vollständigen Ausdruck der Resonatorbewegung³⁾, bei gehöriger Beachtung der Integralgrenzen, unter das Integralzeichen ein, so findet man, dass die Gleichung der Interferenzcurve zwei Wellenlängen und zwei logarithmische Decrementa enthält. Diese vollständige Gleichung wird eben diejenigen unerwarteten, mehr unregelmässigen Curvenformen erfordern, welche diese Physiker in grösserem Abstand von der Resonanz constatirt haben. Das logarithmische Decrement 0,39, welches als dasjenige des Oscillators angegeben ist, wird nach der vollständigen Theorie ein gewisser Mittelwerth der Decrementa des Oscillators und des Resonators sein. Dieser Mittelwerth wird aber in dem vorliegenden Falle, wo die zwei Decrementa wahrscheinlich wenig von einander abweichen, möglicherweise für beide Instrumente ungefähr zutreffen.

Weitere Messungen von solchen Interferenzcurven nach dem Vorgange von Klemenčič und Czermak, sind besonders

1) Rubens, Wied. Ann. **42**. p. 154. 1891; Bjerknes, Wied. Ann. **44**. p. 513. 1891; Jones, Electrician **27**. p. 520; Pérot, Comptes Rendus **114**. p. 165, 1892. Birkeland, Wied. Ann. **47**. p. 581.

2) Klemenčič und Czernak, Sitzungsberichte der Kaiserl. Akad. der Wissenschaften in Wien **101**. 14. Juli 1892. Auszug, Wied. Ann. **50**. p. 174. 1893.

3) Bjerknes, Wied. Ann. **44**. p. 97. 1891.

auch deshalb wichtig, weil sie vollständigeren Aufschluss über die logarithmischen Decrementa der Resonatoren geben werden. Besonders einfach wird der Versuch mit den schwach dämpfenden Resonatoren ausfallen, deren Dämpfung bis jetzt nur nach äusserst groben Schätzungen bekannt ist. In diesem Grenzfalle wird nämlich die Gleichung der Interferenzcurve approximativ nur von der Wellenlänge und dem logarithmischen Decrementa des Resonators abhängen, und man wird die Werthe dieser Constanten in derselben einfachen Weise ermitteln können, wie für den Oscillator aus der mit indifferenten Instrumenten gefundenen Interferenzcurven.

6. *Zusatz.* In einer soeben erschienenen Arbeit der Hrn. Garbasso und Aschkinass¹⁾ ist wieder um die Theorie von der zusammengesetzten Ausstrahlung vertreten worden. Der physikalische Beweis wird darin gesucht, dass verschiedene Resonatoren in verschiedenen Azimuthen am besten ansprechen, was jedoch, wie oben gezeigt, kein bindender Schluss über eine objective spectrale Zerlegung gestattet. Wie aber diese Verfasser bemerken, müssen die zwei Theorien sich nicht unbedingt widersprechen. Eine Function lässt sich immer als eine Summe von beliebig vielen anderen Functionen darstellen, und man kann folglich ebenso viele unwiderlegbare Theorien über die Ausstrahlung des Hertz'schen Oscillators aufstellen, wie man Zerlegungen einer Function in Summen von anderen Functionen auffinden kann.

Eine Discussion über einfache oder zusammengesetzte Ausstrahlung ganz im allgemeinen hat deshalb keinen Sinn und wird erst dann fruchtbar werden, wenn die Vertreter der zusammengesetzten Ausstrahlung den expliciten mathematischen Ausdruck aufgestellt haben von allen denjenigen Componentbewegungen, welche sie in der Oscillatorwelle vorzufinden meinen. Dann wird man durch Summation constatiren können, ob Identität besteht oder nicht mit der Resultantbewegung, welche die Vertreter der einfachen Ausstrahlung annehmen, und deren mathematische Ausdruck sie längst aufgestellt haben, nicht als eine Hypothese ad hoc, sondern als eine Consequenz der allgemeinen Theorie der electrischen Schwingungen.

1) Garbasso u. Aschkius, Wied. Ann. 53. p. 534. 1894.

5. Die Gesetze der Oberflächenspannung von polarisirtem Quecksilber; von O. Wiedeburg.

§ 1. Vor kurzer Zeit habe ich eine Theorie der galvanischen Polarisation¹⁾ aufgestellt, von der ich glaube sagen zu dürfen, dass sie aus wenigen wohlbestimmten Annahmen in mathematisch durchgebildeter Form eine umfassende Darstellung des ganzen Erscheinungsgebietes liefert. Ihre Grundlagen lassen sich in folgenden Sätzen aussprechen:

1. Die an den Electroden einer Zersetzungszelle bestehenden Potentialdifferenzen sind proportional der jeweiligen Dichtigkeit der Ionenmengen, die als Bestandtheile einer electricischen „Doppelschicht“ vor den Electroden sich finden.

2. Von den durch den Strom herangeführten Ionen wird *unter allen Umständen* ein Theil neutralisiert (und nach Erreichung des Löslichkeitsmaximums abgeschieden); der Rest sammelt sich an der Electrode electromotorisch wirksam an, indem er in den Verband der Doppelschicht eintritt; ich setze den im Zeitelement neutralisierten Bruchtheil proportional der augenblicklichen Ionendichtigkeit, so dass also letztere um so langsamer zunimmt, je grösser sie bereits ist.

3. Neben diesen directen Wirkungen des Stromes spielen sich im allgemeinen noch andere Vorgänge ab, die die Ionenansammlung zu vermindern streben, sei es, dass die Ionen von den Electroden occludirt oder durch Reaction mit neutralen Körpern (wie etwa H -Ionen durch Verbindung mit dem gelösten Luftsauerstoff) beseitigt werden. Die Geschwindigkeit dieser Vorgänge wird im allgemeinen durch die mitspielenden Diffusionserscheinungen bestimmt; kann man diese mit einiger Annäherung als stationär betrachten, so wird man jene Geschwindigkeit als proportional der Ionendichtigkeit in Rechnung setzen dürfen.

Die aus diesen Grundannahmen sich ergebenden Folgerungen zeigten sich in guter Uebereinstimmung mit der Er-

1) O. Wiedeburg, Wied. Ann. 51. p. 302. 1894.

fahrung; insbesondere Versuche von Bartoli lieferten die Zahlenwerthe der eingeführten Constanten. Bei dieser Prüfung meiner Formeln zog ich damals ausschliesslich den Fall in Betracht, wo die Zersetzungszelle *feste unangreifbare Electroden* besass, von Platin, Gold u. s. w.

§ 2. Aufgabe des Folgenden soll es nun sein, meine vorstehend kurz wiedergegebene Anschauung vom Wesen der galvanischen Polarisation anzuwenden auf die Vorgänge an *Quecksilber-Electroden*, und das, was man von diesen bisher weiss, gleichfalls zur Prüfung meiner Theorie heranzuziehen.

Hier sind es namentlich die eigenartigen Wirkungen der Polarisation einer Quecksilberfläche auf deren Oberflächenspannung, die man zum Gegenstand eingehender experimenteller Untersuchungen gemacht hat.

Dabei stellte sich denn allmäthlich heraus, dass die seiner Zeit von Lippmann¹⁾ gegebene Theorie sich nicht in befriedigender Uebereinstimmung mit den Erfahrungsthatsachen befand, und verschiedentlich hat man versucht, sie abzuändern oder von Grund aus neu zu bauen.

Will man die Beziehung zwischen der Oberflächenspannung einer Hg-Electrode und ihrem electrischen Zustand formuliren, so wendet man bekanntlich die allgemeinen Sätze der Thermodynamik an auf den Energieumsatz, der sich bei gegenseitiger Einwirkung beider an der Electrode abspielt. So ergiebt sich die Grundgleichung der Lippmann-Helmholtz'schen Theorie: Bezeichnet s die Grösse, T die Spannung der in Berührung mit einer electrolytischen Lösung befindlichen Quecksilberoberfläche, φ die Potentialdifferenz Electrolyt minus Electrode und E die in ersterem liegende electrische Beladung der Berührungsfläche, so gilt die Beziehung²⁾:

$$(1) \quad \frac{\partial T}{\partial \varphi} = - \frac{\partial E}{\partial s}.$$

1) G. Lippmann, Ann. d. Chim. et d. Phys. (5) 5. p. 494. 1875; auch Pogg. Ann. 149. p 546. 1873.

2) Denn für die Aenderung eines *Gleichgewichtszustandes* hat man, wenn U die Gesamtenergie:

$dU = Tds + \varphi dE$, also $d(U - \varphi s) = Tds - Ed\varphi$;
daraus folgt sofort Gl. (1).

Ihrer thermodynamischen Herleitung entsprechend ist die Gültigkeit dieser Formel an die Bedingung geknüpft, dass man es wirklich mit Gleichgewichts- und Ruhezuständen zu thun hat. Auf den umkehrbaren Uebergang von einem Gleichgewichtszustand zu einem gleichberechtigten zweiten beziehen sich diese Differentiale. Aendert man nun diejenigen Grössen ab, die den capillar-electrischen Zustand eines Hg-Meniscus bedingen, so stellt sich der neue Gleichgewichtszustand nicht unmittelbar her, sondern wird erst nach Ablauf einiger Zeit erreicht. Es ist das ein Punkt, der bei messenden Versuchen jedenfalls beachtet werden muss.

§ 3. Um Formel (1) weiter zu behandeln, wollen wir unseren Betrachtungen den, übrigens häufigsten Fall zu Grunde legen, wo die „natürliche“ Potentialdifferenz des Hg gegen den Electrolyten durch eine Ansammlung von *Anionen* erzeugt wird, beim Stromdurchgang aber die Electrode die Rolle der Kathode spielt, also Kationen an sie herantreten.

Es werde mit ϵ die Ladung eines einwerthigen Kations bezeichnet, mit j_a die Flächendichtigkeit der die natürliche Doppelschicht bildenden Anionen, mit j_k dieselbe für die herangeführten Kationen in dem betrachteten Gleichgewichtszustande, dabei immer ein n -werthiges Ion, als n einwerthige gerechnet; dann hat man

$$E = \epsilon (j_k - j_a) s,$$

sodass Gl. (1) übergeht in

$$(2) \quad \frac{\partial T}{\partial \varphi} = - \epsilon (j_k - j_a).$$

Die erste, oben angeführte Grundannahme unserer Theorie, wonach die Potentialdifferenz φ an der Electrode proportional zu E/s , führt uns nun unmittelbar einen Schritt weiter.

Wie in meiner früheren Arbeit setze ich den Proportionalitätsfaktor gleich $c/2$, also

$$(3) \quad \varphi = \frac{c}{2} \epsilon (j_k - j_a),$$

dann ergibt sich

$$(4) \quad \frac{\partial T}{\partial \varphi} = - \frac{2}{c} \cdot \varphi,$$

$$(5) \quad T = T_m - \frac{1}{c} \varphi^2,$$

wo T_m den, $q = 0$ entsprechenden, Maximalwerth von T bedeutet (c wesentlich positiv!).

Meine erste, die Integration der Grundgleichung ermögliche, Annahme wurde schon von Lippmann gemacht, aber in der weiteren Behandlung der integrirten Gleichung (5) besteht der Unterschied. Man hat bisher immer stillschweigend die erregende electromotorische Kraft innerhalb weiter Grenzen genau gleich der Gesammpolarisation gesetzt; nach meiner Anschauung ist solche Gleichheit nur in idealen Grenzfällen zu erreichen.

Das Folgende soll zeigen, dass man bei Einführung der thatsächlichen Abhängigkeit der Polarisation von den Versuchs-umständen auf Grund der Gleichung (5) zu einer vollständigen Beschreibung der capillarelectrischen Erscheinungen gelangt.

Es handelt sich zu diesem Zwecke zunächst darum, den zeitlichen Verlauf der Polarisation an der Electrode in Formeln darzustellen, ähnlich wie es von mir früher für feste Electroden durchgeführt ist. Dabei gestalten sich hier die Verhältnisse noch aus dem Grunde etwas einfacher, weil man wohl stets bei der Untersuchung der uns interessirenden Vorgänge die zweite Electrode der Zersetzungszelle aus einer Hg-Fläche bestehen lässt, die sehr gross ist im Vergleich zu der kleinen Oberfläche des Meniscus, an der man die Spannungsänderungen beobachtet. Dann wird man die an der zweiten Electrode eintretende Polarisation überhaupt vernachlässigen und die Potentialdifferenz an derselben als constant gleich der natürlichen Potentialdifferenz, also gleich $-(c/2)\epsilon j_a$ setzen können, gerechnet im Sinne Electrolyt minus Electrode.

Wird dann wieder wie bei meinen früheren Herleitungen die stromerregende electromotorische Kraft mit A , der Gesammtwiderstand des Stromkreises mit W , die von $t = 0$ bis $t = t$ durch einen Querschnitt durchgetretene Electricitätsmenge mit q bezeichnet, so liefert das Ohm'sche Gesetz:

$$(6) \quad W \frac{dq}{dt} = A - \frac{c}{2} \epsilon (j_k - j_a) - \frac{c}{2} \epsilon j_a = A - \frac{c}{2} \epsilon j_k.$$

§ 4. Was nun die Veränderung der polarisirenden Ionenansammlung an der kleinen Kathode anlangt, so wollen wir zunächst den idealen Fall betrachten, wo die Eingangs unter (3) erwähnten Nebeneinflüsse zu vernachlässigen sind.

Dann gilt der Annahme (2) gemäss die Gleichung:

$$(7) \quad \varepsilon dj_k = (1 - \beta \varepsilon j_k) \frac{d q}{s},$$

wo β die für die Stärke der Anhäufung maassgebende Grösse, für die ich den Namen „Neutralisationsconstante“ vorgeschlagen habe. Aus dem System simultaner Differentialgleichungen (6) und (7) folgt nun leicht durch Integration, wenn man noch beachtet, dass für $t = 0$ auch $j_k = 0$ sein soll, die Kationenansammlung als Function der Zeit dargestellt durch:

$$(8) \quad \varepsilon j_k = \frac{A}{\beta} \cdot \frac{1 - e^{-xt}}{A - \frac{P}{2} e^{-xt}},$$

wobei

$$x = \frac{A - \frac{P}{2}}{W_s} \cdot \beta$$

ist, und

$$P = \frac{e}{\beta}$$

den Werth des Polarisationsmaximums bedeutet.

Formel (8) lehrt, dass mit wachsender Zeit εj_k einem Grenzwerth zustrebt, den es in asymptotischer Näherung für $t = \infty$, in den meisten Fällen aber praktisch schon nach kurzer Zeit erreicht. Das ist also der Gleichgewichtszustand, den wir für die Anwendung der thermodynamischen Beziehung ins Auge zu fassen haben.

Dabei sind zwei Fälle zu unterscheiden, je nach dem Werthe der electromotorischen Kraft A :

a) ist $A < P/2$, also $x < 0$, so wird nach obigem

$$(9) \quad (\varepsilon j_k)_{t=\infty} = \frac{2}{e} \cdot A,$$

mithin die Potentialdifferenz an der Kathode:

$$q = A - \frac{e}{2} \varepsilon j_a,$$

oder wenn man die natürliche Potentialdifferenz Hg Electrolyt:

$$\frac{e}{2} \varepsilon j_a = q_a$$

setzt:

$$(10) \quad q = A - q_a;$$

es erreicht also schliesslich die Gesamtpolarisation $\varphi + \varphi_a$ genau die Höhe der erregenden electromotorischen Kraft A .

Für die Oberflächenspannung ergiebt sich hieraus nach (5) die Darstellungsform:

$$(11) \quad T = T_m - \frac{1}{c} A^2 + \frac{2}{c} A \varphi_a - \frac{1}{c} \varphi_a^2,$$

oder aber:

$$(12) \quad T = T_0 - \frac{1}{c} A^2 + \frac{2}{c} A \varphi_a,$$

wo

$$T_0 = T_m - \frac{1}{c} \varphi_a^2$$

die dem Fehlen äusserer electrischer Einflüsse ($A = 0$) entsprechende „natürliche“ Oberflächenspannung.

b) Andere Gesetze aber gelten für alle Werthe von $A > P/2$, also $x > 0$; hier findet man

$$(13) \quad (\varepsilon j_k)_t = x = \frac{1}{\beta},$$

also auch

$$(14) \quad \varphi = \frac{P}{2} - \varphi_a,$$

beide unabhängig von A , nämlich die Gesamtpolarisation

$$\varphi + \varphi_a = \frac{P}{2},$$

gleich ihrem möglichen Maximalwerth, der hier nur halb so gross ist als im Falle zweier gleich grosser Electroden.

Danach behält für alle Werthe von $A > P/2$ natürlich auch die Oberflächenspannung constant denjenigen Werth

$$(15) \quad T_e = T_0 - \frac{1}{c} \frac{P^2}{4} + \frac{1}{c} P \varphi_a$$

bei, den sie für $A = P/2$ erreicht hat.

Ueberblicken wir also den Gang von T bei wachsendem A , so finden wir, dass T vom Anfangswerth T_0 in parabolischer Curve ansteigt bis zum Maximum T_m , das sie für einen Werth der electromotorischen Kraft $A_m = \varphi_a$ erreicht, dann abfällt bis zum Endwerth T_e , um diesen weiterhin beizubehalten. Je nachdem der Werth des Polarisationsmaximum $P/2$ kleiner oder grösser als $2\varphi_a$ ist der parabolische Abfall der Curve jenseits des Maximums nur kurz oder verhältnismässig weit-

reichend. Die Fig. 1 und 2 zeigen den Verlauf der Curve für 2 verschiedene mögliche Fälle.

Betrachtet man die von Paschen¹⁾ und Meyer²⁾ experimentell gefundenen Curven für den Zusammenhang zwischen Oberflächenspannung und polarisirender electromotorischer Kraft, so erkennt man leicht, dass die vorstehenden Figuren die Gestaltung dieser Curven für einen idealen Grenzfall zur Anschauung bringen.

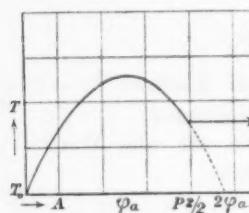


Fig. 1.

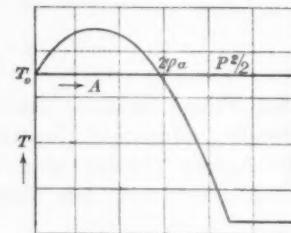


Fig. 2.

§ 5. Stellen wir uns nun die Frage, welche Veränderungen wir an unseren bisherigen Betrachtungen anzubringen haben, um durch unsere Darstellung den thatssächlich beobachteten Verhältnissen mehr, und möglichst vollkommen, gerecht zu werden. Es lässt sich wohl nicht bestreiten, dass im allgemeinen auch in Zersetzungszellen mit Quecksilberelectroden solche Nebenvorgänge sich abspielen werden, wie wir sie ein-gangs besprochen und ihrer Wirkung nach durch die Grundannahme (3), zusammengefasst haben. Die Beseitigung insbesondere von H -Ionen im Wege einer fortduernd durch Convection aufrecht erhaltenen Reaction mit gelösten neutralen Körpern, etwa dem absorbirten Luftsauerstoff, ist ja von der Natur der Electroden ganz unabhängig. Die Aufnahme von H durch das Quecksilber vermittelst Occlusion scheint, wenn überhaupt vorhanden, verhältnissmässig schwach zu sein. Wie es sich mit der Occlusion anderer Ionen, mit der Bildung von Amalgamen, verhält, das ist eine Frage, die noch besonderer Erwägung bedarf. Jedenfalls werden wir berechtigt, ja genehmigt sein, von der Stromwirkung unabhängige Einflüsse in

1) F. Paschen, Wied. Ann. **39**. p. 43. 1890.

2) G. Meyer, Wied. Ann. **45**. p. 508. 1892,

Rechnung zu ziehen, die auf eine Verminderung der polarisirenden Ionenansammlung hinarbeitet. Ich muss im übrigen auf meine früheren ausführlichen Darlegungen¹⁾ Bezug nehmen und mich hier mit dem Hinweis begnügen, dass man mindestens in vielen Fällen mit genügender Annäherung jene Nebenwirkungen berücksichtigt, wenn man eine Veränderung der Ionenansammlung von der Grösse

$$\partial j_k = - a \cdot j_k \, dt,$$

wo a constant, in die Grundgleichung (7) einführt. Demnach stellt nun Gleichung

$$(16) \quad \epsilon \, dj_k = (1 - \beta \epsilon j_k) \frac{dq}{s} - a \epsilon j_k \, dt$$

in Verbindung mit der früheren Gleichung

$$(6) \quad W \frac{dq}{dt} = A - \frac{c}{2} \epsilon j_k$$

die Formulirung unseres Problems dar. Durch Integration ergiebt sich jetzt die Ionenansammlung als Funktion der Zeit:

$$(17) \quad \epsilon j_k = A \frac{1 - e^{-yt}}{A \eta - \frac{c}{2} e^{-yt}},$$

wobei

$$y = \frac{A \eta - \frac{c}{2}}{W s}$$

und die uns vor allem interessirende Constante

$$\eta = \beta \frac{A + \frac{P}{2} + \Omega + \sqrt{\left(A + \frac{P}{2} + \Omega\right)^2 - 2AP}}{2A}$$

wenn zur Abkürzung

$$\Omega = \frac{a \, W \, s}{\beta}$$

gesetzt wird.

Wieder ergiebt sich ein Ruhezustand, dem der Vorgang der Polarisation zustrebt, für $t = \infty$, und hier hat nun die Ionenansammlung den Werth

$$(18) \quad (\epsilon j_k)_{t=\infty} = \frac{1}{\eta},$$

gültig für alle beliebigen Werthe der electromotorischen Kraft A und nach obigem zu berechnen als Function derselben und

1) l. c. p. 317 ff.

der übrigen Versuchsumstände (*W, s*). Danach stellt sich die Potentialdifferenz an der Kathode dar in der Form:

$$(19) \quad \varphi = \frac{PA}{A + \frac{P}{2} + \Omega + \sqrt{\left(A + \frac{P}{2} + \Omega\right)^2 - 2AP}} - \varphi_a,$$

oder also auch gegeben durch die Gleichung:

$$(20) \quad (\varphi + \varphi_a)^2 - (\varphi + \varphi_a) \left(A + \frac{P}{2} + \Omega\right) + \frac{PA}{2} = 0.$$

Wir erkennen aus dieser wieder, wie bei der Behandlung der festen Electroden, dass diejenige Grösse, die wir neben den Stoffconstanten c , β , (a) kraft der Versuchsanordnung als maassgebend für den Werth der Gesamtpolarisation $\varphi + \varphi_a$ anzusehen und demgemäss als unabhängige Variable für diese einzuführen haben, die Stromdichte

$$(21) \quad i = \frac{A - (\varphi + \varphi_a)}{W.s}$$

ist. Denn dadurch gestaltet sich (20) um in:

$$(22) \quad \varphi + \varphi_a = \frac{P}{2} \cdot \frac{i}{i + \omega}, \quad \text{wo } \omega = \frac{a}{\beta}.$$

Dabei möchte ich noch einmal hervorheben, dass diese letzten Rechnungen sich auf denjenigen stationären Zustand der Polarisation beziehen, den wir mit grosser Annäherung bereits nach endlicher Zeit als erreicht annehmen können.¹⁾ Die Stromstärke oder genauer Stromdichte ist dann so regulirt, dass durch ihre Wirkung fortdauernd der Verlust an polarisirenden Ionen infolge jener Nebenvorgänge ausgeglichen, und ein constante Polarisation aufrechterhalten wird. Nichts hindert uns, auf einen solchen dynamischen Gleichgewichtszustand die Hauptsätze der Energetik, hier in Form der Gleichung (5), anzuwenden.

Wir erhalten dann die Oberflächenspannung als Function der jeweilig herrschenden Stromdichte:

$$(23) \quad T = T_0 + \frac{1}{c} \varphi_a P \cdot \frac{i}{i + \omega} - \frac{1}{c} \frac{P^2}{4} \frac{i^3}{(i + \omega)^2},$$

Auf Grund dieser Gleichung können wir denjenigen Werth von i ermitteln, für den T den Maximalwerth T_m erreicht: er findet sich zu

1) Die Gleichung (22) stellt unsere Grundannahme (16) dar für den Fall stationärer Polarisation: $d j_k = 0$.

$$i_m = \omega \cdot \frac{\varphi_a}{\frac{P}{2} - \varphi_a};$$

bei weiterem Wachsen von i nähert sich T in asymptotischem Abfall dem Endwerthe T_e (15).

Aus praktischen Gründen empfiehlt es sich, die Darstellung der Oberflächenspannung als Function der polarisirenden electromotorischen Kraft A näher ins Auge zu fassen. Wir erhalten sie, wenn wir den Werth von φ aus (19) in (5) einsetzen:

$$(25) \quad T = T_m - \frac{1}{c} \left\{ \frac{PA}{A + \frac{P}{2} + \Omega + \sqrt{\left(A + \frac{P}{2} + \Omega \right)^2 - 2AP}} - \varphi_a \right\}^2;$$

Dabei ist zu berücksichtigen, dass die Form der Curve $T = f(A)$ noch abhängt von dem durch die Versuchsanordnung bedingten Parameter $\Omega = a W s / \beta$. Stellen wir auch hier die Frage, für welchen Werth A_m der unabhängigen Variablen T den Maximalwerth erreicht, so finden wir die Antwort am leichtesten, wenn wir beachten, dass beim Maximalwerth jedenfalls $\varphi = 0$ und $i = i_m$ (vgl. 24) sein muss. Danach muss die Gleichung bestehen:

$$(26) \quad \frac{A_m - \varphi_a}{W s} = \omega \cdot \frac{\varphi_a}{\frac{P}{2} - \varphi_a},$$

und es ergiebt sich also:

$$(27) \quad A_m = \varphi_a + \Omega \cdot \frac{\varphi_a}{\frac{P}{2} - \varphi_a};$$

wir erhalten den praktisch wichtigen Satz:

Der dem Maximum der Oberflächenspannung entsprechende Werth der polarisirenden electromotorischen Kraft ist nicht, wie im idealen Grenzfall, genau gleich der natürlichen Potentialdifferenz $Hg | Electrolyt$, sondern unterscheidet sich von letzterem durch ein stets positives, von der Versuchsanordnung abhängiges Zusatzglied.

Letzteres wird im allgemeinen den Charakter eines Correctionsgliedes tragen; kennen wir die beim Maximum herrschende Stromstärke J_m und den Gesammtwiderstand W , so finden wir seinen Werth $= J_m \cdot W$. Das ist ja selbstverständlich, sobald man die stillschweigende Voraussetzung, die Polarisation sei genau gleich der erregenden electromotorischen Kraft fallen lässt.

Bei der Ermittelung des Werthes A_m , wie sie behufs Be-

rechnung der wichtigen Constanten q_a vielfach vorgenommen worden ist, sollte man also eine Controlle von Stromstärke und Gesammtwiderstand nicht unterlassen. Voraussichtlich würden auf diesem Wege z. B. bei den neueren Messungen von Rothmund¹⁾ die kleinen Schwankungen, die der = q_a angenommene Werthe von A_m bei Wiederholung einer Versuchsreihe öfters zeigt, sich noch haben verkleinern lassen.

Den genaueren Gang der ganzen Curve $T = f(A)$, einer Curve 3. Grades, könnte man durch analytische Discussion der Gleichung (25) ermitteln. Wir übersehen ihn aber genügend, wenn wir ihn mit dem Gang vergleichen, den die denselben Zusammenhang darstellende Curve in dem früher behandelten idealen Grenzfall zeigt. Da die Polarisation, die die Änderungen der Oberflächenspannung hervorruft, jetzt im Gegensatz zu früher hinter der polarisirenden electromotorischen Kraft zurückbleibt, so wird die Oberflächenspannung jeden einzelnen Werth erst bei Anwendung einer höheren electromotorischen Kraft annehmen als damals. Daraus folgt dann:

Von T_0 ausgehend verläuft die Curve zunächst unterhalb²⁾ der „idealen“, erreicht das Maximum T_m für einen Werth etwas über q_a (s. oben), bleibt dann oberhalb jener, weist auf dem absteigenden Ast einen Wendepunkt auf, hinter dem sie allmählich, nicht in plötzlichem Richtungswechsel gegen die Horizontale umbiegt, um sich asymptotisch dem Endwerth T_e zu nähern. Die Fig. 3 und 4 (a. f. S.) zeigen einige solche Gestaltungen, wie man sie als möglich ansehen muss; dabei ist die ideale Curve punktiert, die tatsächlich zu erwartende ausgezogen gezeichnet.

Ich meine nun, ein Blick auf die schon erwähnten von Paschen²⁾ und Meyer³⁾ empirisch gefundenen Curven lehrt, dass man eine bessere Uebereinstimmung der Messungsergebnisse mit den Folgerungen unserer Theorie nicht verlangen kann.

Im einzelnen wäre über den Gang der Curve etwa noch folgendes zu bemerken:

Dass T seinen Ausgangswert T_0 noch einmal wieder er-

1) V. Rothmund, Ztschr. f. physik. Chemie. 15. p. 1. 1894.

2) Man ersieht ja auch aus (25): Solange die Grösse in der Klammer dort negativ, wirkt das Auftreten von β_2 verkleinernd auf den Werth von T ; wird jene positiv, wirkt es vergrössernd.

3) Paschen u. Meyer, l. c.

reicht, tritt nur ein, wenn $(P/4) > q_a$, und zwar nach (23) bei einem Werth der Stromdichte gleich

$$(28) \quad i_0 = \omega \frac{\frac{2 q_a}{P}}{\frac{2}{2} - 2 q_a},$$

also bei gegebenem W und s für einen Werth der electro-motorische Kraft gleich

$$(29) \quad A_0 = 2 q_a + \Omega \frac{\frac{2 q_a}{P}}{\frac{2}{2} - 2 q_a}.$$

Vergleicht man die Ausdrücke für A_0 und A_m , so sieht man: da $(P/2) - 2 q_a$ jedenfalls wesentlich kleiner ist als

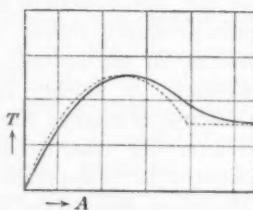


Fig. 3.

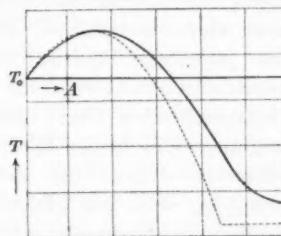


Fig. 4.

$(P/2) - q_a$, so ist die Abweichung des A_0 von seinem Ideal-werth $2 q_a$ grösser als die des A_m von q_a , ja auch grösser als das doppelte der letzteren Abweichung, d. h. der absteigende Ast der Curve verläuft seiner *allgemeinen* Richtung nach weniger steil, als der aufsteigende, wie das die angeführten Versuche und, soweit sie genügend weit erstreckt, auch diejenigen von Rothmund¹⁾ ergeben.²⁾

Gouy³⁾ vergleicht die von ihm für verschiedene Electrolyte gefundenen Curven dadurch, dass er ihre absteigenden (kathodischen) Theile zur Deckung bringt; nach dem vorstehenden hat das wohl keinen rechten Werth. Der von Nebenvorgängen weniger beeinflusste und darum wichtigere Theil der Curve ist

1) l. c.

2) Je grösser Ω wird durch Anwachsen von W oder s , um so mehr weicht die Curve von der idealen ab; das zeigen auch Beobachtungen von Paschen für H_2SO_4 mit $W = 10$ Mill. S. E. (l. c. p. 47).

3) Gouy, Compt. rend. 114 p. 211. 1892.

der aufsteigende Ast. Gouy schreibt selbst den eigentlich electrolytischen (Abscheidungs-)Vorgängen eine grosse Bedeutung für den Verlauf der capillarelectrischen Erscheinungen zu, und meint ganz richtig, dass darum Helmholtz's Doppelschichtentheorie ohne wesentliche Abänderung den Thatsachen nicht genügen könne. Letzteres darf ich nun wohl von meinen vorliegenden Ausführungen hoffen, da diese eben auf einer sachgemässen Umgestaltung der Helmholtz'schen Vorstellungen beruhen.

§ 6. Gestützt auf zahlreiche eigene Messungen hat bereits Paschen¹⁾ den Grundgedanken der hier gegebenen Erklärung ziemlich richtig ausgesprochen. Er leitet die Veränderung der Oberflächenspannung bei Steigerung der polarisirenden electromotorischen Kraft aus der durch letztere erzeugten jeweiligen Polarisation in grossen Zügen richtig ab und weist insbesondere darauf hin, dass es für die Gestaltung der entsprechenden Curve darauf ankomme, in welcher Beziehung diejenigen beiden Werthe der electromotorischen Kraft zu einander stehen, die dem Maximum der Oberflächenspannung (φ_a) und dem „Beginn der Electrolyse“ entsprechen. In unseren Ausführungen, die eine theilweise Electrolyse für jeden Werth der electromotorischen Kraft zur Grundlage haben, tritt an Stelle des letzteren der des Polarisationsmaximums (hier $P/2$). Wir sahen, dass die Beobachtungsergebnisse sich auch den genauer formulirten Forderungen unserer Theorie befriedigend fügen. Dass die bisher vorliegenden Beobachtungsreihen eine deutlich erkennbare Abweichung der Curve von der parabolischen Form auch schon in ihrem aufsteigenden Theile zeigen, hat kürzlich Schreber²⁾ ausführlich nachgewiesen, und sich dann bemüht, einen besseren Anschluss der Theorie an die Erfahrung dadurch herbeizuführen, dass er der Beziehung zwischen Potentialdifferenz und polarisirender Ionenmenge an Stelle einfacher Proportionalität (Gleichung 3) die complicirtere Form gab:

$$\frac{E}{s} = A \cdot \varphi \cdot e^{B \varphi},$$

1) F. Paschen, Wied. Ann. **40**. p. 36. 1890.

2) K. Schreber, Wied. Ann. **53**. p. 109. 1894.

wo A und B Constanten. Da er seine Betrachtungen selbst auf den aufsteigenden Ast der Kurve beschränkt, wird man der von mir gegebenen Entwicklung eine grössere Leistungsfähigkeit wohl nicht absprechen können.

Der Lippmann-Helmholtz'schen Doppelschichtentheorie ist von Warburg¹⁾ eine andere Auffassung entgegengestellt worden, mit deren experimenteller Prüfung sich G. Meyer²⁾ beschäftigt hat. Danach sollen sich die Aenderungen der Oberflächenspannung bei Stromschluss einerseits aus der durch Electrolyse eintretenden Aenderung der Concentration des neben dem ursprünglichen Electrolyten stets, wenn auch nur spurenweise, vorhandenen Hg-Salzes, andererseits aus Amalgam-Bildung und Vermehrung erklären. Solche Concentrationsänderungen finden im Verlauf der Polarisation im allgemeinen unzweifelhaft sowohl in der electrolytischen Lösung als in der Electrode statt, es scheint mir aber, dass die Ansicht noch nicht widerlegt worden ist, nach welcher erst die mit solcher Concentrationsänderung parallel laufende Aenderung der Potentialdifferenz die Ursache der Capillaritätsänderung ausmacht, — vielleicht abgesehen von ganz secundären Wirkungen. Was insbesondere die Amalgambildung anlangt, so wird für diese wohl dasselbe gelten, was ich früher³⁾ für eine Occlusion von Gasen ausgeführt habe, dass sich nämlich stets ein gewisser Gleichgewichtszustand zwischen den von der Electrode aufgenommenen und den vor derselben in der Doppelschicht lagernden Mengen des betreffenden Stoffes herzustellen sucht. Danach ist dann Amalgambildung mit Steigerung der Potentialdifferenz und also Aenderung der Oberflächen- spannung nothwendig verbunden, gleichgültig auf welchem Wege sie zu Stande kommt.

§ 7. Bekanntlich hat bereits Lippmann⁴⁾ den weitgehenden Satz zu beweisen gesucht, dass die Beziehung zwischen der Oberflächenspannung T einer Hg-Electrode und der entsprechenden Potentialdifferenz φ *unabhängig* bestehe von der Natur des verwendeten *Electrolyten*. Danach müsste insbesondere

1) E. Warburg, Wied. Ann. 41. p. 1. 1890.

2) G. Meyer, l. c.

3) Wiedeburg, l. c. p. 335.

4) G. Lippmann, Ann. d. Chem. et de Phys. (5) 12. p. 265. 1877.

die maximale Oberflächenspannung (zu $\varphi = 0$ gehörig) eine Constante des Hg allein sein, und ferner die „natürliche Oberflächenspannung“ T_0 aus der „natürlichen Potentialdifferenz“ φ_a sich berechnen lassen für alle Electrolyte vermittelst derselben Constanten. Gemäss unserer Formel:

$$T_0 = T_m - \frac{1}{c} \varphi_a^2$$

wäre also auch c unabhängig von der Natur der electrolytischen Lösung zu erwarten.

Die Lippmann'sche Behauptung ist von Ostwald¹⁾, Paschen²⁾, Gouy³⁾, Rothmund⁴⁾, geprüft und, zunächst was den Werth von T_m anlangt, im allgemeinen, jedoch nicht ausnahmslos richtig befunden worden. Weiter hat Gouy gezeigt, dass die Beziehung zwischen T und φ auch dann die gleiche bleibt, wenn das Hg in Form eines (verdünnten) Amalgams gegeben ist. Dadurch werden meine obigen Einwendungen gegen die Warburg—Meyer'schen Erklärungsweise gestützt. Auch Paschen neigt zu der Lippmann'schen Anschauung und zeigt, dass man die einzelnen Electrolyte in eine glatte Curve mit φ_a als Abscisse und T_0 als Ordinate einfügen kann. Ostwald fand freilich für Werthe von A , die gleich weit von A_m abstehen, die Werthe von T für verschiedene Electrolyte nicht gleich, doch weiss man hier nicht ohne weiteres, wie stark schon die oben behandelten Nebeneinflüsse die Oberflächenspannung verändern. Uns muss nun hier, indem wir absehen von den besonderen Gesetzen, denen etwa T_m unterliegt, vor allem das interessiren, was sich über die Constante c sagen lässt, die ja eine grosse Rolle auch auf dem weiten Gebiet der Polarisation fester Electroden spielt.

§ 8. Man wird eine solche Constante jedenfalls mit grösserer Sicherheit ermitteln, wenn man sich nicht auf eine Beziehung zwischen *einzelnen* messbaren Grössen beschränken muss, sondern ganze Reihen zusammengehöriger Messungen

1) W. Ostwald, Zeitschr. f. physik. Chem. 1. p. 583. 1887.

2) Paschen, l. c.

3) Gouy, Compt. rend. 114. p. 22. 1892.

4) Rothmund, l. c.

durch Ausgleichung ihrer Fehler zur Berechnung verwenden kann. Dazu ist aber nötig, dass die der Rechnung zu Grunde gelegte Gleichung eine möglichst einfache Form besitzt, was bei den capillarelectricchen Erscheinungen, wie wir sahen, nur dann der Fall ist, wenn die von uns besprochenen Nebeneinflüsse vernachlässigt werden können.

So kommen wir denn zu der Frage, ob wir nicht im Stande sind, durch bestimmte Versuchsanordnung den idealen Fall einer ungestörten Polarisation mit genügender Annäherung zu verwirklichen und zur Messung zu bringen. Ich habe früher darauf hingewiesen, dass dieses Ziel für die Polarisation *fester* Electroden durch Anwendung einiger von Arons¹⁾ angegebener Kunstgriffe sich erreichen lasse. Es kommt dabei darauf an, das Fortschreiten der Occlusion sowohl als das der durch Convection (gewöhnlich von einer Electrode zur andern) unterhaltenen Reactionen möglichst bald zu hemmen. Es scheint mir nun, dass bei neueren Versuchen von Bouthy²⁾ dieser anzustrebende Zustand für unsren Fall ziemlich gut erreicht ist.

Bouthy verwendet einen Apparat, der sich kurz als ein umgekehrtes *U*-Rohr mit einem 2 cm und einem 0,1 mm weiten Schenkel beschreiben lässt, in dessen Biegung sich die electrolytische Lösung, hier H_2SO_4 , befindet; um gute Benetzung zu erzielen, wird zunächst diese, sodann das Hg durch die Schenkel in die Höhe gesogen. Bei solcher Anordnung befindet sich über dem zu polarisirenden Meniscus ein mehrere Centimeter langer capillarer Theil³⁾, so dass es dem depolarisirenden Sauerstoff ziemlich erschwert ist, die Kathode zu erreichen, ganz ähnlich wie bei jenen Versuchen von Arons mit verdeckter Electrode. Die Occlusionswirkungen kann man wohl, wie erwähnt, als gering ansehen.

Bouthy hat mit seinem Apparat mehrere Messungsreihen für Schwefelsäure verschiedener Verdünnung augenscheinlich sorgfältig durchgeführt, wenn auch nur für electromotorische Kräfte zwischen 0,05 und 1,0 Dan.; bei höheren würde aller-

1) L. Arons, Wied. Ann. 41, p. 473. 1890.

2) E. Bouthy, Ann. d. Chim. et d. Phys. (7) 3, p. 145. 1894.

3) Bei den sonst üblichen Anordnungen steht meist der Meniscus möglichst nahe am Ende der Capillaren.

dings die Entwicklung von H_2 -Bläschen in der Capillaren sehr stören. Es zeigte sich nun, dass diese Reihen sich vollkommen genügend durch eine einfache parabolische Formel darstellen liessen, im Gegensatz zu den früheren, von Schreber besprochenen Versuchen. Es ist das wohl der beste Beweis, dass wir es hier tatsächlich mit dem Fall einer ziemlich ungestörten Polarisation und also mit der Formel:

$$12) \quad T = T_0 + \frac{2}{c} \varphi_a \cdot A - \frac{1}{c} A^2$$

zu thun haben. Bouthy berechnet die Oberflächenspannung in absolutem Maass und findet z. B.

$$-\frac{d^2 T}{d A^2} = \frac{2}{c} = 27,76 \cdot 10^{-15}$$

im electromagnetischen cm g sec-System, also, da nach ihrer Definition in (3) die Grösse $2/c$ den Charakter einer Capacität der Flächeneinheit hat:

$$\frac{2}{c} = 27,76 \frac{\text{Microfar.}}{\text{cm}^2}.$$

Eine andere Reihe gab statt dessen 27,9, zwei ähnliche mit sehr verdünnter Säure 26,69 und 29,8. Sieht man diese Zahlen als nur durch Beobachtungsfehler ungleich an, so würde man im Mittel etwa zu setzen haben die Constante:

$$\frac{1}{c} = 14 \frac{\text{Microfar.}}{\text{cm}^2}.$$

Auch aus den alten Messungen von Lippmann¹⁾ berechnet Bouthy (unter Beschränkung auf die Nähe des Maximums) einen sehr naheliegenden Werth (14,3).

Mit einem dem Bouthy'schen ähnlichen Apparat hat Paschen²⁾ für eine Reihe verschiedener Electrolyte Messungen ausgeführt, als deren Ergebnisse er nur die Werthe von φ_a , T_0 und T_m (letzteres um mehrere Proc. variabel) angibt. Aus diesen könnte man nun jedesmal den Werth von $1/c$ auf Grund der Gleichung:

$$T_0 = T_m - \frac{1}{c} \varphi_a^2$$

berechnen. Bei den verschiedenen Concentrationen der Schwefel-

1) G. Lippmann, Ann. de Chin. et de Phys. (5) 5. p. 494. 1875.

2) F. Paschen, Wied. Ann. 40. p. 36. 1890.

säure (die stark concentrirten Lösungen mit veränderlichem Verhalten ausgenommen) ergeben sich für $1/c$ sehr gut mit den obigen stimmende Zahlen, nämlich zwischen 13,7 und 15,4. Freilich sind die gesammten Angaben wohl nicht zu einer Entscheidung der Frage, ob die Constante c von der Natur der Electrolyte unabhängig ist, geeignet. Für manche Lösungen ist die Differenz der wenig verschiedenen Grössen T_0 und T_m mit zu grossen procentischen Fehlern behaftet, als dass eine Berechnung von $1/c$ einen Sinn hätte, und ganz allgemein muss man beachten, dass hier, wo es sich gerade um absolute Werthe der Oberflächenspannung handelt, doch auch die Frage nach der Grösse des Randwinkes, der bei Paschen überall = 0 angenommen ist, die sorgfältigste Prüfung erfordert, wenn man nicht etwa überhaupt, um diese Schwierigkeit zu umgehen, andere Messmethoden vorzieht. Diese Verhältnisse verdienen wohl gerade wegen ihrer Bedeutung für den vorliegenden Gegenstand ein eingehendes Studium; übrigens hat bereits Lippmann¹⁾ darauf hingewiesen, dass die Oberflächenspannung des Hg im geschlossenen „Capillarelectrometer“ sich viel weniger mit der Zeit veränderlich erweist, als man sonst bei Capillaritätsmessungen gewohnt ist.

§ 9. Was sich im Fall der Polarisation einer *festen* Electrode über die Constante c bisher sagen lässt, habe ich in meiner früheren Arbeit zusammengestellt. Die Versuche von Bartoli²⁾ ergeben c unabhängig von der Natur der „unangreifbaren“ Electroden Platin, Palladium, Gold und Graphit und überdies auch gleich für die untersuchten Electrolyte H_2SO_4 , NH_3 , HCl , HBr , HJ , denen man auf Grund der weniger entscheidenden relativen Messungen von Blondlot³⁾ noch $ZnSO_4$, $CuSO_4$, $NaCl$, KJ , $Cu(NO_3)_2$ anfügen kann, während hier allerdings andere, vor allem HCl (!), $NaOH$ und KOH wesentliche Abweichungen zeigen. Wir sehen uns also hier in derselben Lage wie oben beim Quecksilber, dass wir nämlich die Frage, ob oder etwa innerhalb welcher Grenzen c unabhängig von der Natur des Electrolyten ist, als eine noch offene bezeichnen müssen.

1) G. Lippmann, Wied. Ann. 11. p. 316. 1880.

2) A. Bartoli, Nuov. Cim. (3) 7. p. 234. 1880.

3) R. Blondlot, Journ. d. Phys. (1) 10. p. 277. 1881.

Als sicher aber können wir eins hinstellen: Für Schwefelsäure fanden wir oben nach Bouthy, Lippmann und Paschen den Werth von:

$$\frac{1}{c} = 14 \frac{\text{Microfar.}}{\text{cm}^2},$$

aus den Bartoli'schen Versuchen ergiebt sich nach meiner Berechnung in guter Uebereinstimmung mit einer alten Beobachtung von F. Kohlrausch¹⁾:

$$\frac{1}{c} 13,4 = \frac{\text{Microfar.}}{\text{cm}^2}$$

mit einer Unsicherheit von ± 5 Proc., hauptsächlich weil der Voltwerth des verwendeten Daniell unbekannt.

Diese Uebereinstimmung ist wohl geeignet, die Bedeutung der Constanten c , auf die ich schon hingewiesen habe, noch mehr zu erhöhen, und ihre genaue Ermittelung für möglichst viele Electrolyte als höchst wünschenswerth erscheinen zu lassen.

Sollte etwa diese genau definirte „Capacität einer polarisierten Electrode“:

$$\frac{2}{c} = 28 \frac{\text{Microfar.}}{\text{cm}^2}$$

dazu berufen sein, für die Vorgänge an den Electroden dieselbe Rolle einer *universellen Constanten* zu spielen, wie die „Ladung eines einwerthigen Ions“:

$$\epsilon = 96540 \frac{\text{Coul.}}{\text{g} \cdot \text{Aeq.}}$$

für die Vorgänge im Innern des Electrolyten?

Die Frage lässt sich auch dahin stellen, ob der Abstand der die Doppelschicht bildenden positiven und negativen Electricitätsmengen voneinander mit der Natur der sich berührenden Stoffe, insbesondere der Ionen sich ändert, oder etwa in allen Fällen derselbe ist. Nach obigem berechnet er sich in bekannter Weise aus der Gleichung:

$$\text{zu } \frac{9 \cdot 10^{20} \cdot 28 \cdot 10^{-15}}{4 \cdot \pi \delta} = \frac{1}{\delta} \\ \delta = 0,32 \cdot 10^{-8} \text{ cm} = 0,032 \mu \mu. ^2)$$

1) F. Kohlrausch, Pogg. Ann. **148**. p. 143. 1873.

2) Vgl. J. Larmor, Phil. Mag. (5) **20**. p. 422. 1885, der auch eine Zusammenstellung von anderweit bestimmt „molekularen Dimensionen“ gibt,

Sollte sich thatssächlich *ein* bestimmter Werth von c als allgemein gültig erweisen, so wäre dann für alle Fälle die Berechnung der natürlichen Potentialdifferenz zurückgeführt auf die Bestimmung der Dichtigkeit der vor der Electrode angesammelten Ionen, und dadurch die Aufgabe anderen molecular-theoretischen Erörterungen bedeutend näher gerückt. Erst wenn es gelungen, auch diesen weiteren Schritt zu thun, wird man von einer vollkommenen Lösung des „Problems der galvanischen Kette“ sprechen können.

Die Nernst'sche Theorie, so ungemein umfassend und fruchtbar sie auch ist, unterrichtet uns doch nur darüber, nach welchem Gesetz die Potentialdifferenz an einer Electrode von der (Ionen-)Concentration der *bespülenden Lösung* abhängt, und muss eine unbekannte Integrationskonstante (die „electrolytische Lösungstension“) in dem vollständigen Ausdruck für die Potentialdifferenz beibehalten.

In welchem Sinne nun auch die erörterte Frage entschieden werden mag, jedenfalls muss es der messenden Physik daran liegen, wirkliche *Constanten* zahlenmässig zu ermitteln und nicht Grössen, die je nach der willkürlichen Versuchsanordnung einen beliebigen Werth annehmen können, wie man das bisher fast stets von der sogenannten Capacität polarisirter Voltameter sagen musste. Das zu ermöglichen, dazu können für den behandelten Fall vielleicht die vorstehenden Ausführungen mithelfen.

Leipzig, im November 1894.

6. Ueber die Totalreflexion des Lichts an dichten (derben) krystallinischen Substanzen; von R. Camerer.

Giesst man geschmolzenes Paraffin auf ein Glasprisma von genügend hohem Lichtbrechungsexponenten, so bemerkt man an der erstarrten Fläche des Paraffins zwei Grenzen der Totalreflexion. Beide sind fast vollständig polarisiert und zwar so, dass die Polarisationsebene der einen Grenze in die Einfallsebene fällt, die der anderen senkrecht zu ihr steht.

Eine genaue Beobachtung dieser Erscheinung, auf welche mich Geheimrath Boltzmann zuerst aufmerksam gemacht hatte, versuchte ich mittelst eines Goniometers, welches eine beinahe auf fünf Secunden genaue Einstellung erlaubte, und das ich der Güte Prof. Groth's verdankte.

Meine ersten Versuche mit dem Instrument waren allerdings ziemlich unbefriedigend. Trotzdem die beiden Fernrohre auf Unendlich eingestellt waren, zeigten sich doch die beiden Grenzen bei einfarbigem (Na)-Licht so schwach, dass es grosse Mühe machte dieselben überhaupt ins Fadenkreuz zu bringen, aber beinahe unmöglich schien auch nur auf Minuten genau abzulesen. Wenigstens erhielt ich bei aufeinander folgenden Ablesungen relativ sehr verschiedene Resultate. Es gelang mir allerdings die Einstellung dadurch ganz merklich zu erleichtern, dass ich das Fadenkreuz unter 45° zur Lichtgrenze stellte; eine fast zehnfache Genauigkeit aber brachte mir der Gedanke ein Nicol'sches Prisma zwischen Fernrohr und Auge zu bringen. Nun war es möglich auf 15 Secunden genau einzustellen und ich erkannte bald den Grund meiner vorher scheinbar regellosen Resultate in einem sehr hohen Temperaturcoefficienten des Paraffins.

Durch einen Wasserstrom, den ich beständig über die mit Paraffin begossene Seite des Prismas laufen liess, konnte ich nicht nur ziemlich constante Ablesungen, sondern auch jede gewünschte Temperatur erhalten. Die Messung der Tem-

peratur geschah durch ein Thermometer, das ich dicht neben dem Paraffin in ähnlicher Weise wie dieses vom Wasser bespülen liess. Eine constructive Schwierigkeit lag dabei darin, dass sowohl die Beweglichkeit des Prismas, als der Wasserabfluss nicht beeinträchtigt werden durfte.

Zu berücksichtigen war ferner das schlechte Wärmeleitungsvermögen des Paraffins. Es ist aus diesem Grunde vortheilhaft die Paraffinschicht nur dünn aufzutragen und ausserdem die Beobachtungen sowohl bei fallender als bei steigender Temperatur des Wasserstromes zu machen. Trägt man nämlich die gefundenen Werthe in einem Coordinaten-system auf, wobei die Abscisse etwa die Brechungsexponenten, die Ordinate die Temperaturen aufzunehmen hat, so bemerkt man ein jeweiliges Nachhinken der Temperatur des Paraffins, derart, dass bei wachsender Temperatur Brechungsexponenten abgelesen werden, die einer etwas niedrigeren Temperatur zu kämen, und umgekehrt. Daraus ergeben sich Mittelwerthe. Verbindet man diese, so zeigt sich eine Curve, die eine schwache Krümmung aufweist, so zwar, dass bei wachsenden Temperaturen die Grösse des Brechungsexponenten, aber auch die Aenderung der Grösse allmählich abnimmt. Die Aenderung der Lichtbrechung des Glases und der Luft bei Temperaturwechsel, sowie die des Prismenwinkels wurde nicht in Rechnung gezogen, da dieselben den Temperaturcoefficienten des Paraffins noch nicht um $1/100$ beeinflussen würden.

Derart untersuchte ich 6 Paraffinsorten, wie sie nach der Höhe des Schmelzungspunktes getrennt bei Dr. Bender und Dr. Hobein in München käuflich sind.

Beim Beobachten der Paraffine von höheren Schmelzpunkten stiess ich auf eine neue Schwierigkeit. Nur bei dem Paraffin vom Schmelzpunkt $40-45^{\circ}$ zeigten sich nämlich wirklich scharfe Grenzen von Hell und weniger Hell. Mit dem Steigen des Schmelzpunktes wurde diese Grenze mehr und mehr in einen Grenzübergang auseinander gezogen. Ich versuchte hierbei Anfang und Ende der Verdunkelung ins Fadenkreuz zu bringen und berechnete dann aus einer grösseren Anzahl derartiger Ablesungen die Brechungsexponenten für Anfang und Ende der Grenze. Hieraus erklären sich in folgendem die Doppelwerthe.

Ich fand für 20° C. und Natriumlicht folgende Lichtbrechungsexponenten, und zwar für

Paraffin vom Schmelzpunkt		Brechung I	Brechung II
„ „ 40—45° C.		1,4776	1,5252
„ „ 45—50° „		1,4840	1,5285
„ „ 55—60° „		1,4842 bis 1,4946	1,5291 bis 1,5425
„ „ 60—62° „		1,4948 bis 1,5016	1,5431 bis 1,5433
„ „ 76—80° „		1,4982 bis 1,4994	1,5251 bis 1,5263
„ überhitzt		1,4904 bis 1,4914	1,5381 bis 1,5391

Diese Doppelwerthe stellen also nicht die Grenzen der Genauigkeit der Beobachtung, sondern innerhalb dieser Grenzen Anfang und Ende des allmählichen Hellerwerdens dar. Man bemerkt, dass die Schärfe der Grenze mit dem Steigen des Schmelzpunktes abnimmt und zwar für Brechung II in stärkerem Maasse als für Brechung I, und dass die Grenzen für Paraffin vom Schmelzpunkt 76—80° am verschwommensten sind.

Oben erwähnte Curve, die graphisch die Abhängigkeit von Temperatur und Brechungsexponent darstellt, konnte zwischen 15° und 25° durch eine Gerade ersetzt werden. Danach berechnete sich mit ziemlicher Uebeinstimmung für alle Paraffine die Abnahme der Brechungsexponenten bei 1° C. Temperaturerhöhung auf 0,00077.

Dies sind die Resultate, die mir eine directe Beobachtung der fraglichen Erscheinung liefern konnte. Zu ihrer Erklärung bieten sich zunächst zwei Möglichkeiten. Entweder die beiden Grenzen der Totalreflexion sind die Folge zweier chemisch getrennter Substanzen des Paraffins oder sie beruhen auf Doppelbrechung. Diese Doppelbrechung kann hervorgerufen sein durch Spannungen des allmählich erstarrenden Paraffins, oder aber sie wird durch eine bestimmte Lagerung etwaiger Krystalle bedingt. Letztere Annahme lässt wieder einige Fragen zu. Wie weit ist Lage und Natur der einzelnen Krystalle beliebig? Welche Bedingungen sind hier veschrieben? Werden die Krystalle durch die eigene Schwere, durch die Adhäsion des Glases, durch die auftretenden Spannungen diesen Bedingungen unterworfen, oder besitzen

sie schon ganz abgesehen von einer bestimmten Orientirung die Fähigkeit die genannte Erscheinung hervorzurufen? Ist endlich diese Eigenschaft des Paraffins nur der mit der Glasfläche in Berührung kommenden Oberflächenschicht eigen, oder ist sie durch die ganze Masse erstreckt?

Die erste Annahme, dass zwei Substanzen, als deren Mischung das Paraffin anzusehen wäre, die beiden Grenzen der Totalreflexion hervorrufen, widerlegt sich leicht aus folgenden Gründen. Erstens müsste in diesem Fall jeder ebene Schnitt des Paraffins, sofern er nur genügend spiegelnd hergestellt werden kann, genau dieselbe Eigenschaft des doppelten Bogens zeigen. Versuche, die ich später näher beschreiben werde, lehren aber, dass das nicht der Fall ist; zweitens wäre unter dieser Annahme die Thatsache der Polarisation, besonders aber der rechtwinkligen Polarisation gar nicht zu erklären.

Ich will hier einführen, dass eine Erscheinung, die man gleich nach dem Aufgiessen des Paraffins auf das Prisma beobachten kann, zur Erklärung durch die Annahme zweier Substanzen von vorne herein Anlass bot. Als ich nämlich einmal versuchte, das Paraffin in recht dicker Schicht auf das Glasprisma aufzugiessen und ich deshalb, sobald die Oberfläche des ersten Gusses erstarrt war, einen weiteren Tropfen flüssiges Paraffin darauf brachte, der dieselbe durch seine Wärme zum Theil wieder ins Schmelzen brachte, konnte ich deutlich drei Bogen der Totalreflexion unterscheiden. Einer von ihnen war unpolarisiert und verschwand nach kurzer Zeit; die beiden anderen waren in Art der gewöhnlich beim Paraffin auftretenden Erscheinung polarisiert und blieben.

Um die Annahme, dass der eine Bogen von theilweise noch flüssigem Paraffin herstamme, während die beiden anderen mit den früher erwähnten Lichtbogen identisch seien, zu prüfen, machte ich folgenden Versuch. Ich formte aus Glaserkitt einen kleinen Behälter, dessen eine Seite durch eine Prismenfläche geschlossen wurde. Dahinein gegossenes Paraffin blieb lange genug flüssig um mittelst des Goniometers nach Art der bekannten Prismenbeobachtung auf Totalreflexion untersucht zu werden. Ein eingetauchtes Thermometer zeigte die jeweilige Temperatur des Paraffins.

Ich sah zunächst *eine* scharfe, unpolarisierte Grenze der Totalreflexion. Aus ihr berechnete ich den Brechungsexponenten des flüssigen Paraffins vom Schmelzpunkt $40-45^\circ$ als 1,4360 gegen Luft für 50°C . und seinen Temperaturcoefficienten als $-0,000\,24$ für einen Grad Temperaturerhöhung.

Nachdem sich das Paraffin auf etwa 45° abgekühlt hatte, erschienen allmählich noch zwei andere Grenzen. Diese waren rechtwinklig zu einander polarisiert, und ergaben sich als identisch mit den zu Anfang erwähnten. Jetzt waren also drei Grenzen und zwar parallel nebeneinander über das ganze Gesichtsfeld sichtbar. Zugleich zeigten sich an der Prismenfläche an einzelnen Stellen Ansätze des erstarrenden Paraffins. Dadurch schien obige Annahme völlig erwiesen.

Es bleibt nun noch die Möglichkeit die Ursache der Bogen der Totalreflexion in der Doppelbrechung zu suchen. Die experimentellen Beobachtungen zeigen uns sofort, dass wir die Erscheinung nicht durch die Annahme alleiniger Spannungen erklären können. Denn wäre die Doppelbrechung lediglich durch diese bedingt, so müsste sie auch von ihnen abhängig sein; die Grösse des Brechungsexponenten, besonders aber die relative Entfernung der beiden Lichtbogen müsste in Abhängigkeit stehen von der Grösse der Erhitzung, der Schnelligkeit der Abkühlung und dergl. des Paraffins. Die Beobachtungen ergaben aber für ein und dieselbe Paraffin sorte stets dieselben Brechungsexponenten. Ja noch mehr; ich fand im Laufe der Untersuchungen, dass auch eine aus Schwefelkohlenstoff auf das Prisma niedergeschlagene Paraffinschicht genau dieselbe Erscheinung wie das aufgegossene Paraffin zeigt. Besonders merkwürdig aber schien mir, dass ich identische Grenzen der Totalreflexion hervorrufen konnte, wenn ich das Paraffin ohne Zwischenmittel an das Prisma bis zur Adhäsion anpresste. Letzteren Versuch machte ich auch mit ganz langsam wachsendem Druck, um dem Einwand zu begegnen, das Paraffin sei infolge von Compressionswärme theilweise geschmolzen.

Um mich noch anderweitig über den etwaigen Einfluss von Spannungen zu unterrichten, goss ich Paraffin auf Quecksilber. Zeigten sich auch hier die beiden Bogen der Totalreflexion, so waren wenigstens Spannungen durch Adhäsion

am Glase hierbei nicht thätig gewesen. Der Versuch gelingt am besten, das heisst die Paraffinfläche wird am glattesten, wenn man das Quecksilber anwärmt, damit die Erstarrung erst bei ganz ruhiger Oberfläche eintritt, und wenn man das Ganze in kaltes Wasser stellt, damit die Abkühlung vom Quecksilber ausgeht. Allerdings war der Erfolg ein anderer als der erwartete, und doch einer, der bewies, dass die bei auf Glas aufgegossenem Paraffin sichtbare Erscheinung unmöglich reine Spannungerscheinung sein kann. Ich sah nämlich bei diesem Versuch nicht zwei Grenzen, aber auch nicht eine, was doch hätte der Fall sein müssen, wenn die beiden durch Spannung aus einer hervorgegangen wären. Denn ich hatte mich überzeugt, dass die Fläche der auf Quecksilber aufgegossenen Paraffinschicht genug spiegelte, um eine Grenze der Totalreflexion, wenn eine solche überhaupt vorhanden war, sehen zu lassen. Vielmehr konnte ich nur, wenn ich die Fläche mit Jodkaliumquecksilberlösung als stark brechendem Mittel an das Prisma brachte, ein allmähliches Dunklerwerden im Bezirke der beiden Brechungsexponenten wahrnehmen. Diese Erscheinung war begreiflicher Weise zu lichtschwach, als dass sie mit dem Goniometer hätte untersucht werden können. Es gelang mir aber dieselbe dadurch einigermassen festzulegen, dass ich die eine Hälfte des Prismas mit Paraffin begoss; an die frei gebliebene andere Hälfte aber die mit Jodkaliumquecksilberlösung befeuchtete Paraffinplatte anlegte. Die vom angegossenen Paraffin herrührenden Grenzen konnten mir dabei als Maassstab dienen für die Verdunkelung des über Quecksilber erstarrten.

Ferner construierte ich mir eine kleine Presse aus Messing, die mir gestattete zugleich die mit dem Zwischenmittel befeuchtete Paraffinplatte langsam anzupressen und zu beobachten. Mit wachsendem Druck zeigten sich in der Höhe der daneben sichtbaren Grenzen des aufgegossenen Paraffins Verdunkelungen, die sich nach und nach zu identischen Grenzen der Totalreflexion ausbildeten. Zu erwähnen ist, dass mit zunehmender Schärfe der Lichtbogen auch ihre Polarisation zunahm. Eine merkliche Verschiedenheit der beiden Grenzen konnte ich dabei nicht wahrnehmen.

Des weiteren versuchte ich einen beliebigen Schnitt durch

Paraffin mit einer geschliffenen Glaskante möglichst ohne Anwendung von Druck so eben zu hobeln, dass ich ihn auf Totalreflexion untersuchen konnte. Den Normaldruck suchte ich zu vermeiden, da ja, wie schon bemerkt, ein blosses Anpressen des Paraffins an die Glasfläche die Erscheinung des doppelten Lichtbogens hervorrufen konnte. Brachte ich die glatt gehobelte Fläche mittelst Jodkaliumquecksilberlösung an das Prisma, so sah ich ebenfalls nur einen allmählichen Uebergang von Hell nach Dunkel.

Merkwürdiger Weise konnte aber selbst eine unter Druck hergestellte ebene Fläche die beiden Bogen nicht zeigen. Führte ich nämlich zu diesem Zweck dicke Glasstäbe unter steter Drehung mit ziemlich starkem Normaldruck über die Paraffinschicht, so zeigte sich doch auch hier, obgleich die Fläche sehr gut spiegelte, beim Anlegen an die befeuchtete Prismenfläche nur das allmähliche Dunklerwerden.

Nur in einem einzigen Fall erschien bei einer mittels Jodkaliumquecksilberlösung mit dem Prisma verbundenen Paraffinebene die beiden deutlichen und polarisierten Grenzen. Wenn es mir nämlich gelang, die ohne Medium an das Prisma angesetzte Paraffinschicht, die ja als solche bekanntlich die beiden Grenzen sehen liess, von der Glasfläche glatt abzulösen, so zeigte dieselbe, sobald ich sie abermals, nun aber mittels des Mediums an das Prisma brachte, genau die alten Lichtbogen.

All diese Resultate, aus denen wir später noch mehrere Schlüsse ziehen werden, lehren uns vor allem, dass Spannungen die Urheber unserer Erscheinung jedenfalls nicht sein können. Die Annahme, dass Krystalle dieselben sind, wird dagegen sehr durch diese Beobachtungen unterstützt. Es ist besonders das Eintreffen der beiden Lichtbogen beim Anpressen und beim Niederschlag aus einer Schwefelkohlenstoff-Paraffinlösung, das uns förmlich zu diesem Schluss zwingt. Derselbe wird noch bedeutend dadurch unterstützt, dass das Paraffin, wenn auch kein einheitlich kystallinischer, so doch ein krySTALLisationsfähiger Körper ist, wie leicht aus einem Niederschlag aus Schwefelkohlenstoff unter dem Mikroskop bemerkt werden kann, und dass ferner das relativ weite Auseinanderliegen und die zeitliche Unveränderlichkeit der beiden Brechungsexponent

mit Nachdruck dafür sprechen, dass wir es hier nicht mit Spannungen in dem sehr weichen Material zu thun haben.

Unter der eben begründeten Annahme, dass die Erscheinung des doppelten Lichtbogens in der krystallinischen Natur des Paraffins begründet ist, wollen wir zunächst ganz allgemein untersuchen, ob sich überhaupt Krystalle denken lassen, beziehungsweise welches ihre Art und die Bedingungen ihrer Lage sein müssen, um unter den gegebenen Verhältnissen die bekannte Erscheinung überhaupt hervorrufen zu können.

Der Einfluss, den die einzelnen Paraffinkrystalle von aussen erleiden, wird lediglich bedingt durch die Ebene des Glases. In dieser Ebene ist offenbar keine Richtung bevorzugt, da die Paraffinschicht nicht als einheitlicher Krystall aufgefasst werden darf. Ein Beweis hierfür ist, wenn nöthig, dadurch gegeben, dass sich die beiden Grenzen nicht ändern, wenn man in Art des zuletzt beschriebenen Versuchs das mit Jodkalium-quecksilberlösung benetzte Paraffinstück in der Ebene des Glases dreht. Das Einzige, was sämmtlichen Krystallen gemeinsam sein kann, ist demnach eine Beziehung zur Normalen auf der Glasfläche. Es frägt sich, ob diese eine Beziehung genügend, oder ob sie überhaupt nöthig ist, um die Erscheinung zu erklären.

Soll, und das ist ja wohl die Bedingung für scharf abgegrenzte Lichtbogen, soll der Winkel der Totalreflexion für beide Strahlen bei beliebiger Drehung des einzelnen Krystals in der Ebene des Glases einen constanten Werth behalten, so muss auch im Paraffin die Geschwindigkeit eines jeden von beiden Strahlen in der Ebene des Glases nach jeder Richtung hin gleich gross sein. Das heisst, die Wellenoberfläche der beiden Strahlen im Paraffin müssen durch die Ebene des Glases in concentrischen Kreisen geschnitten werden, oder die Elasticitätsfläche des Krystals muss so beschaffen sein, dass sämmtliche Ebenen durch einen auf der Glasfläche normalen Durchmesser congruente Ellipsen ausschneiden. Sollen die reflectirten Strahlen in ihrer Gesammtheit polarisiert erscheinen, so tritt die weitere Bedingung hinzu, dass durchweg die Axen dieser congruenten Ellipsen constante Winkel mit der Normalen auf der Glasfläche einschliessen. Polarisation in der Einfallsebene und senkrecht zu ihr verlangt, dass die eine der

Ellipsenachsen, und zwar stets dieselbe, mit der Normalen zusammen fällt.

Betrachten wir unter diesen Gesichtspunkten die einaxigen Krystalle, so erhellt sofort, dass es eine, und nur eine Richtung des Elasticitätsellipsoids gibt, welche die obigen Bedingungen erfüllt, nämlich die Rotationsaxe desselben, die mit der optischen Axe zusammen fällt. Diese muss also normal zur Ebene des Glases stehen. Legen wir nämlich ein Ebenenbüschel durch diese Axe, so schneiden wir das Elasticitätsellipsoid in lauter congruente Ellipsen. Dabei müssen die Grenzen der Totalreflexion auch beim Zusammenwirken verschieden in der Glasebene gedrehter Krystalle in der Einfallsebene des Lichts und senkrecht zur ihr polarisiert erscheinen, da stets die einen Axen obenerwähnter Ellipsen sich in der Glasebene, die anderen auf ihr senkrecht befinden. Ebenso werden bei dieser Lage der Krystalle die Wellenoberflächen durch die Ebene des Glases in concentrischen Kreisen geschnitten; und eine einfache Ueberlegung zeigt, dass, sobald die optische Axe des Krystals nicht mehr auf der Ebene des Glases senkrecht steht, beide Formen unserer Bedingung unerfüllt bleiben.

Die Elasticitätsoberfläche des zweiaxigen Krystals ist ein dreiaxiges Ellipsoid. Hier können wir keinen Durchmesser finden derart, dass ein durch ihn gelegtes Ebenenbüschel uns lauter congruente Ellipsen liefert. Für jede der drei Axen ist das von vornehmerein klar; legen wir aber durch einen beliebigen Durchmesser ein Ebenenbüschel, so wird stets die Ebene durch die grosse Axe eine Ellipse ausschneiden, die eine grössere grosse Axe haben muss als alle übrigen, diesen demnach nicht congruent sein kann. Ebenso ist es nicht möglich durch den Mittelpunkt der Wellenoberfläche eine Ebene zu legen, die zwei concentrische Kreise ausschneidet.

Wenn demnach Krystalle nur nach einer Richtung in ihrer Lage beschränkt sind, so gibt es nur einen einzigen Fall, der zwei scharfe polarisierte Grenzen der Totalreflexion ermöglicht. Umgekehrt können wir nach dieser Theorie behaupten: Wenn an einer nicht einheitlich durchkrystallisierten Fläche, das heisst einer Fläche, in der keine Richtung bevorzugt ist, zwei derartige Grenzen zu sehen sind, so sind, wenn diese Grenzen

überhaupt von Krystallen hervorgerufen werden, die Krystalle einaxig, und ihre optischen Axen stehen senkrecht zur gemeinsamen Ebene.

Es ist also die eine Bedingung, dass nämlich die Lage des einzelnen Krystals nach einer Richtung beschränkt sei, sowohl nothwendig, als auch bei der Anwesenheit einaxiger Krystalle genügend, und obige Schlussfolgerungen sind mit einer gewissen Wahrscheinlichkeit auf die an der Oberfläche befindlichen Paraffinkrystalle anzuwenden.

Für die Praxis lässt sich hingegen der ganz allgemeine Einwand machen, dass der einaxige Krystall als specieller Fall des zweiaxigen aufgefasst werden kann, und dass daher bei der mangelhaften Genauigkeit jeder Beobachtung obiger Satz nur in der Art ausgesprochen werden könne, dass in Wirklichkeit die Paraffinkrystalle auch zweiaxig sein könnten, wenn nur zwei ihrer Elasticitätsachsen sehr ähnliche Werthe hätten. Würde dann die dritte senkrecht zur Glasfläche stehen, so hätten wir augenscheinlich wieder zwei total polarisierte Grenzen, von denen die eine scharf, die andere um so verschwommener wäre, je weiter die beiden Elasticitätsachsen in ihrer Grösse auseinander lägen; so zwar, dass Anfang und Ende der Verdunkelung den Brechungsexponenten dieser beiden Elasticitätsachsen entsprächen. Etwas Aehnliches kann bei den Paraffin sorten vom Schmelzpunkt $45-50^\circ$ und $55-60^\circ$ vermutet werden, wo jedesmal der eine Brechungsexponent viel schärfer fest gelegt ist als der andere. Wenn bei den Paraffinen von höheren Schmelzpunkten die Langsamkeit des Grenzübergangs für beide Brechungsexponenten zunimmt, so könnte man annehmen, dass hier das Senkrechtstehen der dritten Elasticitätsaxe kein vollkommenes mehr ist. Je mehr dies zunimmt, um so mehr nähern wir uns dem Zustande des Nichtorientirtseins der Krystalle. Wir wollen denselben nun ganz allgemein ins Auge fassen. Die theoretischen Betrachtungen werden uns gestatten, wenn sie noch durch Versuche unterstützt werden, Schlüsse bezüglich des auf Quecksilber aufgegossenen Paraffins und ähnlicher Erscheinungen mit grosser Wahrscheinlichkeit zu ziehen.

Wir kennen das Gesetz nicht, nach dem sich Krystalle in sogenannt regelloser Anordnung zusammen finden, nehmen

daher einfach an, dass sämmtliche Richtungen gleichwerthig seien. Das Licht wird bekanntlich nicht nur von der äussersten Oberfläche eines Körpers, sondern von der gesamten Oberflächenschicht reflectirt. Sobald nun die einzelnen Krystalle merklich grösser sind, als die sehr geringe Dicke dieser Oberflächenschicht, das Gegentheil findet vielleicht bei manchem der als isotrop bekannten Körper statt, so ist kein Grund vorhanden, warum die einzelnen Krystalle sich in ihrer Wirkung wesentlich beeinträchtigen sollten. Es werden sich vielmehr die einzelnen Reflexionsergebnisse einfach addiren.

Daraus folgt für einaxige Krystalle folgendes. Da jeder einzelne Krystall die Totalreflexion des ordinären Strahles besitzt, so wird auch ihre Summe dieselbe Grenze aufweisen. Was die Totalreflexion des extraordinären betrifft, so wird dieselbe bei den einzelnen Krystallen je nach der Richtung ihrer optischen Axe gegen die gemeinsame Schnittfläche zwischen dem Maximal- und Minimalwerth derselben variiren. Wir werden daher als Gesammtgebniss die Hälfte der Helligkeitsabnahme vertheilt sehen zwischen die Grenzen der Totalreflexion der Maximal- und Minimalbrechung des extraordinären Strahles; die zweite Hälfte wird an der dem ordinären Strahl zukommenden Stelle eine scharfe Grenze bilden. Dass diese Grenze nicht polarisirt sein kann, ergiebt sich daraus, dass die Polarisation eine Uebereinstimmung der Schwingungsrichtungen erfordern würde, diese aber einen Parallelismus der Hauptschnitte der einzelnen Krystalle. Dieser Parallelismus ist aber ausgeschlossen, da die Hauptschnitte jedesmal durch die Richtung des Strahles und die variable Richtung der optischen Axe bestimmt sind.

Wie verhält sich die Sache nun bei Körpern, die ein dichtes und regelloses Gemenge von zweiaxigen Krystallen sind? Ein beliebiger Schnitt durch den Körper und damit durch die Elasticitätsfläche eines einzelnen Krystalles hat hier nicht mehr wie beim Rotationsellipsoid einaxiger Krystalle stets, sei es als grösste bei positiven, sei es als kleinste Ellipsenaxe bei negativen Krystallen, den constanten Durchmesser des Ellipsoidäquators. Vielmehr hat hier im allgemeinen jeder Schnitt eine andere grosse und eine andere kleine Axe. Das heisst so viel, als dass die Grenzen der

werthig
siersten
n Ober-
krystalle
r Ober-
anchem
nd vor-
Wirkung
ielmehr

a jeder
chles be-
fweisen.
so wird
richtung
zwischen
n. Wir
Hellig-
r Total-
ordinären
n Strahl
ass diese
s, dass
ingungs-
llismus
arallelis-
jedesmal
Richtung

die ein
rystellen
d damit
hat hier
Krystalle
kleinste
n Durch-
im all-
e andere
nzen der

Totalreflexion beider Strahlen für jeden Krystall verschieden sind, dass wir keine einheitliche Grenze haben, sondern einen allmählichen Uebergang vom Maximum zum Minimum. Dabei ist noch zu berücksichtigen, dass für jeden Schnitt des dreiaxigen Ellipsoids die grosse Axe der Schnittellipse zwischen den Werthen der grossen und mittleren, die kleine aber zwischen denen der mittleren und kleinen Elasticitätsaxe liegen muss. Es vertheilt sich daher die Hälfte der Helligkeitsabnahme auf die Grenzen zwischen der Totalreflexion des grossen und mittleren Brechungsexponenten, die andere Hälfte auf die Grenzen zwischen der Totalreflexion des mittleren und kleinen. Wenn daher zwei Brechungsexponenten sehr benachbarte Werthe haben relativ dem dritten, so wird umgekehrt das Helligkeitsgefälle innerhalb der ersten viel grösser und leichter bemerklich sein, als innerhalb der letzteren.

Eine ähnliche Erscheinung konnten wir an den Paraffinflächen wahrnehmen, die durch Abschleifen, Poliren oder Aufgüssen auf Quecksilber hergestellt waren. Dieselben zeigten bekanntlich an Stelle der Totalreflexion nur einen ganz allmählichen Uebergang von Hell nach Dunkel. An diesen Flächen müssten daher zweiaxige Krystalle in regelloser Anordnung liegen. Die drei Brechungsexponenten müssten etwa gleich weit voneinander entfernt sein, da ein Unterschied im Gefälle des Dunklerwerdens nicht wahrgenommen werden konnte.

Die freilich sehr wünschenswerthe Sicherstellung dieser aus theoretischen Betrachtungen gefolgerten Schlüsse würde offenbar in der Art am directesten erfolgen, wenn es gelänge einen einzelnen der mikroskopisch kleinen Krystalle sowohl aus der Masse des Paraffins, als auch aus der auf Glas aufgegossenen Oberflächenschicht zu isoliren und zu beobachten. Diesem Verfahren stellten sich aber scheinbar unüberwindliche Schwierigkeiten entgegen. Es könnte ja vielleicht gelingen, einen ins freie auskristallirten Krystall genau zu messen, doch wäre es nicht sicher, dass in der Masse des Paraffin, aber geradezu unwahrscheinlich, dass in der aufgegossenen Schicht sich gleiche Krystalle befinden. Ein Versuch aber einen dieser Krystalle der Oberflächenschicht zur krystallographischen Untersuchung zu isoliren, erschien völlig aussichtslos.

Ich war also lediglich auf eine Massenbeobachtung angewiesen. Die Resultate derselben unterstützten immerhin bedeutend die aus den theoretischen Betrachtungen gefolgerten Schlüsse. Es liess sich nämlich eine Verschiedenheit der Krystalle im Sinne dieser Betrachtungen bemerken, je nachdem dieselben sich unter der Einwirkung von Adhäsionskräften, oder ohne solche gebildet hatten.

Die Paraffinkrystalle, die sich in einer gesättigten Schwefelkohlenstofflösung nach kurzer Zeit zeigen, sind relativ lange astförmige Nadeln. Sie geben unter dem Polarisationsmikroskop ein lebhaftes Farbenspiel und löschen bei einer Umdrehung viermal aus. Ihr ganzes Verhalten erinnert unbedingt an das zweiaxiger Krystalle. Dieselbe Erscheinung bemerkte man bei einer dünnen auf Glas aufgegossenen oder niedergeschlagenen Paraffinschicht. Die Zweiaxigkeit dieser Krystalle bedeutet eine schöne Uebereinstimmung mit den Resultaten der obigen Betrachtungen für die Masse des Paraffins. Ebenso spricht die astförmige Gestalt, die ein Orientirtsein der Krystalle nach der Normalen auf der Glasebene ganz unerklärlich liesse, mit Entschiedenheit dafür, dass wir an der Glasfläche Krystalle von anderer Form haben dürfen. Auch ist in der That der Anblick von Paraffin, das in einer ganz ausserordentlich dünnen Schicht auf eine Glasplatte niedergeschlagen wurde, ein erheblich anderer als bei einer dickeren Schicht. Wohl zeigen sich sporadisch noch die vorhin erwähnten Nadeln mit ihrem Farbenspiel, vermutlich die Punkte, an denen ein Auskrystallisiren nach der Luft zu stattgefunden hat, während die Hauptmasse des Paraffins in scheinbar isotropem Zustand die Ebene des Glases bedeckt, in isotropem oder einaxigen Zustand mit senkrechten optischen Axen — das ist ja für den in dieser Richtung Schauenden dasselbe — gleichsam durch Adhäsion mit dem Glase am Auskrystallisiren verhindert. Dass diese Masse in der That nicht isotrop sein kann, etwa ein isotropes Medium des sonst krystallinischen Paraffins, wurde mir durch das Auftreten der beiden Bogen der Totalreflexion bei einem ähnlich dünnen Niederschlag bewiesen. Derselbe durfte so dünn sein, dass er kaum mit blossem Auge bemerkt werden konnte. Unter einem gewissen Winkel mit dem Mikroskop betrachtet zeigte er ein

etwas schuppiges Aussehen, was vielleicht auf eine Blättchenform der einzelnen Krystalle schliessen lässt, eine Form, die das Orientirtsein nach einer Richtung sehr erklärlich machen würde.

Wenn nun auch die Resultate dieser Beobachtungen mit denen der theoretischen Betrachtungen übereinstimmten und dieselben somit im Maass ihrer eigenen Sicherheit unterstützten, so lag es doch nahe, womöglich noch auf anderem Wege experimentell festzulegen, ob überhaupt die theoretischen Folgerungen sich in die Wirklichkeit übertragen liessen.

Zu diesem Zwecke suchte ich Erscheinungen der Totalreflexion, wie sie das Paraffin zeigt, mit Körpern nachzuahmen, deren krystallinische Natur bekannt ist. Ich stellte daher mit einer grossen Anzahl von Körpern isotroper, einaxiger und zweiaxiger Natur analoge Versuche an, das heisst, ich suchte durch Aufgiessen, Anpressen, Auskrystallisiren oder Abschleifen u. dgl. Erscheinungen der Totalreflexion hervorzurufen.

Bei optisch isotropen Körpern sah ich durchweg, mit Ausnahme einiger Körper wie z. B. des Collodiums, die nach dem Eintrocknen auf dem Prisma unregelmässige Spannungserscheinungen zeigten, eine einzige Grenze der Totalreflexion. Bienenwachs und Walrath allerdings, die in den Tabellen von Landolt und Börnstein als isotrop angeführt sind, und deren Brechungsexponent für das äusserste Roth von Wollaston mit 1,49 für Walrath und 1,535 für gelbes Bienenwachs angegeben wurde, zeigten nicht das Verhalten isotroper Körper, sondern eine völige Analogie mit den beim Paraffin beschriebenen Erscheinungen. So waren bei auf ein Glasprisma aufgegossenem Bienenwachs wie Walrath je zwei analog denen des Paraffin polarisierte Grenzen der Totalreflexion sichtbar. Ich berechnete die entsprechenden Brechungsexponenten und fand für 20° C. die des gelben Bienenwachses als 1,4984 und 1,5408 mit einem Temperaturcoefficienten von -0,00022 für einen Grad Temperaturerhöhung, die des Walrath als 1,4956 und 1,5556 mit einem Temperaturcoefficienten von -0,00049. Die Grenzen waren in ähnlicher Weise wie die der Paraffine von höherem Schmelzpunkt nicht absolut scharf. Die Verdunkelung erstreckte sich bei beiden Grenzen des Wachses

auf etwa $12/_{10000}$ des Brechungsexponenten, also für den niederen auf etwa 1,4950 bis 1,4962, für den höheren auf etwa 1,5550 bis 1,5562. Bei der niederen Grenze des Walrath spielte sich die Verdunkelung in etwa $5/_{10000}$, bei der höheren etwa in $12/_{10000}$ des Brechungsexponenten ab.

Ausserdem untersuchte ich zwei Arten chinesisches Wachs und Parnaubawachs; bei diesen zeigten sich auch je zwei polarisierte Grenzen der Totalreflexion. Auch die übrigen beim Paraffin angestellten Versuche wiederholte ich mit Bienenwachs und Walrath und zwar mit ganz demselben Erfolg. So konnte ich durch directes Anpressen wie durch Auskrystallisierenlassen auf eine Prismenfläche die beiden Bogen der Totalreflexion hervorrufen. Beim Aufgiessen auf Quecksilber konnte ich allerdings, wohl infolge der grösseren Kryallisationskraft des Walrath, keine genügend glatte Fläche erhalten, um dieselbe auf Totalreflexion zu untersuchen; dagegen war die Erscheinung beim Bienenwachs ziemlich deutlich und nur insofern von der beim Paraffin verschieden, als hier der Uebergang von Hell nach Dunkel kein so gleichförmiger war wie dort, dass vielmehr das Gefälle des Dunklerwerdens in der Nähe des niedrigeren Brechungsexponenten plötzlich ein stärkeres wurde. Dies lässt sich bekanntlich dadurch erklären, dass man annimmt, der Werth des mittleren Brechungsexponenten der zweiaxigen Krystalle in der Bienenwachsmasse sei dem niederen näher als dem höheren. Da nun auch unter dem Mikroskop Walrath wie Bienenwachs sich dem Paraffin sehr verwandt zeigen, so sind die bezüglich Paraffin gemachten Schlüsse auch für diese beiden Körper geltend.

Es scheint nun noch nothwendig, nachzuforschen, wie Wollaston auf die Angabe eines einzigen Brechungsexponenten kam. In dem Werke von Beer¹⁾ ist die Art seiner Beobachtung beschrieben. Merkwürdigerweise ist es die auch von mir angewendete Methode, den fraglichen Körper auf ein Prisma aufzugiessen und in diesem Zustande zu untersuchen. Wenn Wollaston trotzdem die beiden Bogen nicht gesehen hat, so lag das vermutlich an der geringeren Güte seines

1) Beer, Höhere Optik 1853.

Instrumentes, vor allem aber wohl daran, dass er nicht nach zwei Bogen suchte. Ist es schon nicht ganz leicht, bei den schwer schmelzenden Paraffinen die Bogen zu entdecken, so ist das beim Wachs und Walrath bedeutend schwieriger, derart, dass es manchmal nicht möglich war, bei ein und derselben Einstellung des Prismas gleich beide Winkel abzulesen, da für die deutlichste Einstellung der einen Grenze die andere beinahe unsichtbar wurde. Ich glaube, dass es ohne Anwendung des Nicols kaum möglich ist, bei einer Einstellung beide Grenzen zu sehen. Ein Nicol aber hat Wollaston, wenn er nicht schon hoffte, zwei Grenzen zu finden, wohl nicht benutzt. Wollaston machte seine Versuche mit dem äussersten Roth. Danach stimmt sein Brechungsexponent für Walrath ziemlich genau mit den kleineren der von mir gefundenen Werthe, der für Bienenwachs mit dem grösseren überein. Ein genauer Vergleich ist nicht möglich, da bei den Wollaston'schen Brechungsexponenten die Temperaturangabe fehlt.

Zu den weiteren Untersuchungen mit ein- und zweiaxigen Körpern sah ich mich lediglich darauf angewiesen, Salze von nicht zu hohem Brechungsexponenten auf dem Prisma aus Wasser, Alkohol, Chloroform u. dgl. auskrystallisiren zu lassen. Ich benutzte dabei Substanzen wie Natriumarsenat, Natriumnitrat, Strychninsulfat und eine Menge anderer. Sobald bei diesen Präparaten der deutliche Lichtbogen der Flüssigkeit nach dem Verdunsten dieser verschwunden war, konnte ich überhaupt keine Grenze der Totalreflexion mehr entdecken. Es ist dies ein Verhalten, wie es zwar bei zweiaxigen Krystallen durch ein regelloses Aufkristallisiren, bei einaxigen aber nur dadurch erklärt werden zu können scheint, dass entweder eine Luftschicht zwischen dem Salz und dem Glas Platz gefunden oder dass die der Glasebene zugewandte Oberfläche des Niederschlages zu uneben war, um einheitlich reflectiren zu können. Das scheint auch in der That der Fall gewesen zu sein; denn es gelang mir nicht, durch eine zwischengebrachte stark brechende Oelschicht ein wirklich feststehendes Resultat zu erzielen. Auch das bekannte Verfahren, durch Beigabe von Gummi arabicum zur Lösung der Salze deren Krystallisationskraft zu vermindern, war insofern für meinen Zweck erfolglos, als mir das Präparat nur den

Lichtbogen des Gummi arabicum zeigte und damit nur vermuten liess, dass die einzelnen Krystalle selbst nicht in einer einheitlichen Ebene geschnitten wurden.

Bessere Resultate lieferten Versuche mit glatt geschliffenen Flächen dichter (derber) Minerale. Bedingung für diese Körper war die chemische Reinheit, ein Punkt, der bekanntlich bei derartigen Mineralien nur selten ganz erfüllt wird. In physikalischer Beziehung sollten sie aus mikroskopisch kleinen, ganz regellos gelagerten Krystallen von bekannten Brechungsverhältnissen bestehen. Versuche mit derartigen Körpern, die ich den Hrn. Dr. Grünling und Dr. Muthmann vom mineralogischen Institut zu München verdanke und die ich bei Voigt und Hochgesang in Göttingen hatte schleifen lassen, ergaben genau die durch die theoretischen Betrachtungen vorhergesagten Resultate. So zeigte eine mit Jodkaliumquecksilberlösung an ein stark brechendes Prisma angelegte Marmorfläche, als Repräsentant einaxiger Krystalle, nur eine scharfe unpolarisierte Grenze. Das aus ihr berechnete Brechungsverhältniss stimmte in den vier ersten Decimalen mit dem des ordinären Strahles im Kalkspath überein. Die vom extra-ordinären Strahl herrührende Verdunkelung war zu undeutlich, um bemerkt zu werden. Das ist begreiflich, da die beiden Brechungsexponenten des Kalkspaths sehr weit auseinander liegen.

Als Repräsentant der zweiaxigen Krystalle sei ein Baryt erwähnt. Die Brechungsexponenten des einzelnen Krystals sind nach den Tabellen von Landolt und Börnstein 1,63609, 1,63717, 1,64795. Die beiden kleineren Exponenten sind demnach nur um 0,00108 verschieden. Das ist die Ausdehnung — am Goniometer ungefähr 10 Minuten — in der sich die Hälfte der Verdunkelung abspielen muss. Man glaubt deshalb auch mit blossem nur durch ein Nicol bewaffneten Auge eine scharfe unpolarisierte Grenze zu sehen. Versucht man aber beim Goniometer auf Anfang und Ende dieser Grenze einzustellen, so kommt man in der That mit relativ grosser Ueber-einstimmung auf Brechungsexponenten, die der mittleren und grössten Lichtgeschwindigkeit im Barytkrystall entsprechen. Das beweist, dass die aus den theoretischen Betrachtungen gezogenen Schlüsse für dichte Minerale ein- wie zweiaxiger Natur gelten.

Fasse ich nun zum Schluss die verschiedenen Resultate zusammen, so sind folgende Unregelmässigkeiten bei der Messung des Brechungsexponenten durch Totalreflexion zu erwähnen.

1. Man sieht, obgleich der Brechungsexponent des Prismas höher ist, als der Maximalbrechungsexponent der den Körper bildenden Krystalle, überhaupt keine deutliche Grenze der Totalreflexion. Beispiele hierfür sind glatt gehobeltes oder auf Quecksilber aufgegossenes Paraffin oder Bienenwachs.

2. Man bemerkt nur eine einzige, mehr oder weniger scharfe unpolarisierte Grenze. So zeigt sich bei Marmor eine scharfe, bei Baryt eine verwaschene Grenze. Von isotropen Körpern sehen wir hier natürlich ab.

3. Man bemerkt zwei mehr oder minder scharfe deutlich polarisierte Grenzen. Das tritt ein beim aufgegossenen, angespannten oder auf das Prisma auskrystallisierten Paraffin, Bienenwachs und Walrath.

Die erste Erscheinung findet ihre Erklärung, wenn an der untersuchten Fläche unregelmässig gelagerte zweiaxige Krystalle von relativ verschiedenen Brechungsexponenten anliegen. Die zweite, wenn unregelmässig gelagerte einaxige, oder bei nicht scharfer Grenze, wenn solche zweiaxige Krystalle anliegen, bei denen zwei Hauptbrechungsexponenten nahezu gleich sind. Die dritte Erscheinung wird erklärbar, wenn die Krystalle einaxig sind und stets solche Flächen an der Oberfläche anliegen, die senkrecht zur optischen Axe sind. Bei nicht scharfer Grenze können die Krystalle auch zweiaxig sein. Es müssen aber stets solche Krystallflächen der Oberfläche angenähert parallel sein, welche senkrecht stehen auf der einen Hauptelastizitätsaxe, und überdies müssen die beiden anderen Hauptelastizitätsachsen nahezu gleich sein.

Im Anschluss an die eben erwähnten und in Berücksichtigung einiger im Laufe der Arbeit gemachten Schlüsse sind mir sämmtliche am Paraffin gemachten Beobachtungen nur unter folgender Hypothese, für welche freilich noch eine weitere Bestätigung sehr wünschenswerth wäre, erklärbar.

Die Masse des Paraffin besteht aus zweiaxigen Krystallen, deren Maximal- und Minimalbrechungsexponent ungefähr mit

denen übereinstimmt, die beim aufgegossenen Paraffin zu Tage treten. Der mittlere Brechungsexponent muss von den beiden anderen relativ verschieden sein. Diese Annahme wird dadurch begründet, dass man bei abgehobelten oder auf Quecksilber aufgegossenen Paraffinflächen nur einen allmählichen Uebergang von Hell zu Dunkel in den oben erwähnten Grenzen und keinen Unterschied im Gefälle dieses Uebergangs wahrnehmen kann.

Beim Anpressen, Angiessen oder Niederschlagen des Paraffins aus einer flüchtigen Lösung entsteht eine Oberflächenschicht mit einaxigen oder nahezu einaxigen Krystallen, deren optische Axe, beziehungsweise deren eine von den beiden anderen stark verschiedene Elasticitätsaxe senkrecht oder nahezu senkrecht auf der Glasfläche steht. Dies folgt insofern aus unseren obigen Schlüssen, als man bei derartigen Paraffinflächen zwei rechtwinklig polarisierte Grenzen der Totalreflexion wahrnimmt.

Wir können somit, wenn es sich darum handelt aus der Totalreflexion des Lichtes an dichten (derben), krystallinischen Substanzen Schlüsse zu ziehen, bezüglich der physikalischen Natur der einzelnen Krystalle, zwei Hauptfälle unterscheiden.

In dem einen haben wir es mit Körpern wie Marmor und dichtem Baryt zu thun, deren krystallinische Natur durch die Herstellung eines Schliftes nicht verändert wird. Hier können wir in jedem Falle feststellen, ob die einzelnen Krystalle isotrop beziehungsweise einaxig, oder ob sie zweiaxig sind. Ferner lässt sich in jedem Fall der Brechungsexponent des isotropen oder der ordinäre des einaxigen Krystals genau berechnen. Würde es gelingen auch einen allmählichen Grenzübergang wahrzunehmen, so wäre für diesen Körper die Unmöglichkeit der isotropen Natur der Krystalle erwiesen. Im günstigsten Falle, wenn das Ende dieses Grenzübergangs, beziehungsweise bei zweiaxigen Krystallen Anfang, Ende und ein Unterschied im Gefälle desselben beobachtet werden könnte, liessen sich der extraordinäre Strahl, beziehungsweise die drei Brechungsexponenten wenigstens beiläufig bestimmen.

Wenn andererseits die Natur der einzelnen Krystalle bei Herstellung einer ebenen Fläche möglicherweise verändert wird,

können diese Ausführungen natürlich nur für die betreffende Oberflächenschicht gelten.

Eine solche Verschiedenheit der Krystalle des Paraffins in Oberflächenschichten, die auf verschiedene Weise hergestellt worden waren, mit grosser Wahrscheinlichkeit nachgewiesen zu haben, scheint mir das bemerkenswertheste Ergebniss dieser Arbeit zu sein.

7. Zur Theorie des Stefan'schen Calorimeters;
von W. Kutta.

Das Stefan'sche Calorimeter, aus zwei concentrischen, durch zur Axe senkrechte Kreisflächen abgeschlossenen Cylindern bestehend, ist von Stefan¹⁾ und Winkelmann²⁾ zur Bestimmung der Wärmeleitung von Gasen, von letzterem auch für Flüssigkeiten, benutzt worden. Um dieselbe aus den Versuchen zu berechnen, ist eine möglichst genaue Kenntnis der Wärmebewegung im Hohlraum zwischen den Cylindern, und speciell der zwischen beiden überströmenden Wärmemenge nöthig, wenn sie auf constanter Temperatur erhalten werden. Für die letztere sind Näherungen von Stefan, Winkelmann und Graetz³⁾ angegeben worden; es soll versucht werden, einen genaueren Werth mittelst der von Kirchhoff⁴⁾ gegebenen Methode, die conforme Abbildung auf Rotationskörper, anzuwenden, und einer dieser ähnlichen Methode zu finden. Dabei wird die von Thomson⁵⁾ entwickelte Formel für die conforme Abbildung einer von den Geraden $y=0$; $y=b$; $x=0$; $x=a$ im ersten Quadranten begrenzten Fläche, also eines gebrochenen Streifens, auf einen geraden unendlichen Streifen ζ von der Breite b benutzt; sie ist

$$z = x + iy = \frac{b}{\pi} \log \left(\frac{u+1}{u-1} \right) + \frac{ai}{\pi} \log \left(\frac{u+i\frac{a}{b}}{u-i\frac{a}{b}} \right).$$

$$u = \sqrt{\frac{\frac{\pi\zeta}{b} + a^2}{\frac{\pi\zeta}{b} - b^2}}; \quad \zeta = \xi + i\eta.$$

1) Stefan, Sitzungsber. der Wiener Akademie. **65**. p. 45. 1872.

2) Winkelmann, Pogg. Ann. **156**. p. 497. 1875; Wied. Ann. **44**. p. 429. 1891; **46**. p. 323. 1892.

3) Graetz, Wied. Ann. **45**. p. 300. 1892.

4) Kirchhoff, Gesammelte Abhandlungen. p. 101. 1882.

5) Thomson, Recent Researches, Cap. 3. 1893.

Für gegen b grosse, reelle Werthe von z ist also sehr nahe

$$\zeta = x - \frac{b}{\pi} \log \left(\frac{4}{a^2 + b^2} \right) - \frac{2a}{\pi} \operatorname{arctg} \left(\frac{a}{b} \right).$$

Für grosse, rein imaginäre Werthe von z ist

$$\zeta = -\frac{by}{a} + \frac{b}{\pi} \log \left(\frac{4a^2b^2}{a^2 + b^2} \right) + \frac{2b^2}{\pi a} \operatorname{arctg} \left(\frac{b}{a} \right).$$

Speziell für $a = b$ werden diese Formeln

$$\zeta = x - \frac{b}{\pi} \log \frac{2}{b^2} - \frac{b}{2}$$

$$\zeta = -y + \frac{b}{\pi} \log (2b^2) + \frac{b}{2}.$$

In diesem Falle ist ferner für $z = 0$

$$\zeta = \frac{2b}{\pi} \log b;$$

für $z = a + bi$

$$\zeta = \frac{2b}{\pi} \log b + bi.$$

Für grosse, positive oder negative Werthe von ζ bilden sich senkrechte Transversalen dieses Streifens als ebensolche im Streifen z ab. Werden also die Grenzlinien der Streifen je auf den Temperaturen 0 und 1 erhalten, so ist die im durch die Transversalen x_1 und y_1 begrenzten Flächenstücke des gebrochenen Streifens strömende Wärme (beim Leitungscoefficienten k)

$$\begin{aligned} & \frac{k}{b} \left(x_1 - \frac{b}{\pi} \log \frac{2}{b^2} - \frac{b}{2} \right) + \frac{k}{b} \left(y_1 - \frac{b}{\pi} \log 2b^2 - \frac{b}{2} \right) \\ &= \frac{k}{b} \left[x_1 + y_1 - b \left(1 + \frac{2 \log 2}{\pi} \right) \right]. \end{aligned}$$

In der Art der bisherigen Näherungen würde man sie als $k(x_1 + y_1 - b)/b$, der Summe der Geraden constanter Temperatur proportional ansetzen müssen. Man sieht an diesem Beispiel, dass die Wärmeleitfähigkeit etwas zu klein berechnet wurde.

Wir wenden nun unter der Voraussetzung $a = b$ (d. h. die Entfernung der Deckflächen der Cylinder gleich der ihrer Mäntel) und b klein gegen den Radius R_1 und die Höhe H_1 des äusseren Cylinders die von Kirchhoff angegebene Methode auf den von den beiden Halbcylindern begrenzten Raum an, die entstehen, wenn man durch die Mitte der Cylinderaxe senkrecht zu ihr eine Ebene legt. Fig. 1 stelle einen Axenschnitt durch einen derselben dar. Den zu betrachtenden Raum zerlegen

wir in drei Räume. Im ersten (I), durch Rotation der Fläche $JKLM$, und im dritten (III), durch Rotation von $NQPR$ um die Cylinderaxe y_1 entstanden, denken wir uns die Wärmebewegung als durch das Vorhandensein der Ecke wegen zu grosser Entfernung nicht mehr merklich gestört; der zweite Raum II , durch Rotation von $JM E_1 R N A_1 J$ entstanden, und durch $A_1 E_1$ in die Räume II_a und II_b zerlegt, enthält die Ecke und das Gebiet der durch sie veranlassten Störungen der Wärmebewegung. Dabei sei JM in der Entfernung Y_1 parallel zur q -Axe $A_1 Q$; RN in der Entfernung x_1 parallel zur y_1 -Axe PQ .

Gemäss Kirchhoff's Darlegungen ist die Wärmemenge

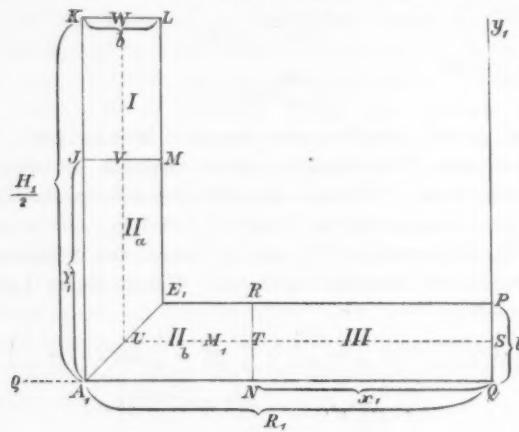


Fig. 1

die durch den von den Kreisen A und B um die Axe begrenzten Theil einer Rotationsfläche in der Zeiteinheit fliessst

$$W = 2\pi k [\psi(A) - \psi(B)]$$

Dabei ist, wenn φ die Temperatur ist, ψ durch

$$\frac{\partial \psi}{\partial \varrho} = \varrho \frac{\partial \varphi}{\partial y_1}; \quad \frac{\partial \psi}{\partial y_1} = -\varrho \frac{\partial \varphi}{\partial \varrho}.$$

genügend definiert, und die Richtung von A nach B so zu wählen, dass die Temperatur zur Linken wächst.

Bei uns sei die fragliche Rotationsfläche, durch die die

gesuchte Wärmemenge Ω fliest, die mittere zwischen der Innen- und der Aussenfläche des Hohlkörpers, von deren Axenschnitt ein Viertel in der Linie $STUVW$ der Fig. 1 dargestellt ist. Diese Annahme trägt am besten der Voraussetzung Rechnung, dass b klein gegen R_1 ist, sie ist übrigens in Bezug auf die Räume I und III von keiner Bedeutung. Die Temperaturen der Innen- und der Aussenfläche seien 1 resp. 0, dann ist A und B in Fig. 1 so zu wählen, dass die Richtung AB die umgekehrte des Uhrzeigers ist. KL und PQ sind der Symmetrie wegen Stromlinien.

Im Raume I strömt die Wärme, wie zwischen zwei unendlichen concentrischen Cylindern, da dort der Einfluss der Ecke nicht mehr merkbar sein soll. Daher findet sich einfach

$$\psi = \frac{y_1}{\log R_1 - \log r_1} + C_1.$$

Die im Raum I überströmende Wärmemenge ist somit

$$\begin{aligned} W_I &= 2\pi k \left[\psi(W) - \psi(V) \right] \\ &= \frac{\frac{H_1}{2} - Y_1}{\log R_1 - \log r_1}. \end{aligned}$$

Auch für den Raum III ist die Störung der Wärmebewegung durch die Ecke als unmerklich angenommen, diese geschieht also wie zwischen unendlichen parallelen Platten. Somit ist

$$\psi = \frac{\varrho^2}{2b} + C_2.$$

Durch die Rotationsfläche von TS geht also in der Zeit-einheit die Wärmemenge

$$W_{III} = 2\pi k \left[\psi(T) - \psi(S) \right] = \frac{\pi k x_1^2}{b}.$$

Der Theil II ist die Ecke. Bei den Untersuchnungen über ihn muss vorausgesetzt werden, dass die Breite b gegen die Längen UV und TU als sehr klein betrachtet werden kann, und ebenso die Entfernung von der Rotationsaxe in allen Punkten des Raumes II als die gleiche, also UT wieder als klein gegen R_1 .

Die für die conforme Abbildung eines gebrochenen un-

endlichen Streifens auf einen geraden gegebene Formel, bei der hier A_1 als Anfangspunkt gilt und die x -Axe die Richtung $A_1 Q$ hat, war

$$z = \frac{b}{\pi} \left[\log \left(\frac{u+1}{u-1} \right) + i \log \left(\frac{u+i}{u-i} \right) \right]; \quad u = \sqrt{\frac{\frac{\pi \zeta}{e^b} + b^2}{\frac{\pi \zeta}{e^b} - b^2}};$$

wodurch $\zeta = \xi + i \eta$ durch z bestimmt ist. Nun ist aber die Temperatur φ in irgend einem Punkte des geraden Streifens, dessen beide Grenzen wegen der Conformität auch auf den Temperaturen 1 resp. 0 erhalten werden müssen, (η/b) ; dies ist also auch die Temperatur des diesem Punkte entsprechenden Punktes z . Setzt man demnach

$$\zeta = -\frac{b\psi}{P} + i b \varphi$$

und nimmt P als im Raum II überall wesentlich constante Entfernung des betrachteten Punktes z von der Rotationsaxe, so ist, da $dx = -d\varrho$, $dy = dy_1$ ist, die Bedingung

$$\frac{\partial \psi}{\partial \varrho} = \varrho \frac{\partial \varphi}{\partial y_1}; \quad \frac{\partial \psi}{\partial y_1} = -\varrho \frac{\partial \varphi}{\partial \varrho}$$

erfüllt. ψ ist also der negativ genommene, mit P/b multiplizierte reelle Theil von ζ .

Die in der Zeiteinheit durch die Rotationsfläche von UV gehende Wärmemenge ist

$$W_{IIa} = 2\pi h [\psi(V) - \psi(U)].$$

Da UV gross gegen b sein soll, ist für V

$$\zeta = -Y_1 + \frac{b}{\pi} \log(2b^2) + \frac{b}{2} + i b \varphi$$

$$\psi(V) = \frac{P}{b} \left[Y_1 - \frac{b}{\pi} \log(2b^2) - \frac{b}{2} \right].$$

Denn es ist mit sehr grosser Annäherung JM Stromlinie, also entspricht ihr im geraden Streifen eine Parallele zur Ordinatenaxe. Ebenso ist der Symmetrie wegen $A_1 E_1$ in der Fläche des gebrochenen Streifens Stromlinie, also auch ihr Bild eine Parallele zur Axe der η , somit

$$\psi(U) = \psi(A_1) = -\frac{P}{b} \frac{2b}{\pi} \log b.$$

Die ganze Ueberlegung ist nur insofern ungenau, als im Raume II_a die Entfernung P von der Rotationsaxe zwischen r_1 und R_1 variiert, statt constant zu sein. Wir wählen eben für P den mittleren Radius $R = (R_1 + r_1/2)$, d. h. die Entfernung der Punkte U und V von jener Axe. Dann ist

$$W_{IIa} = 2\pi k R \left[\frac{Y_1}{b} - \left(\frac{\log 2}{\pi} + \frac{1}{2} \right) \right]$$

oder sehr nahe

$$= \frac{2\pi k Y_1}{\log R_1 - \log r_1} - k R (2 \log 2 + \pi).$$

Die ganze zwischen den Cylindermänteln in der Zeiteinheit strömende Wärme ist also

$$W_u = 2(W_I + W_{IIa}) = \frac{2\pi k H}{\log R_1 - \log r_1} - 4k R \log 2,$$

wo $H = (H_1 + h_1/2)$ die mittlere Höhe, $-4k R \log 2$ das bisher nicht beachtete Correctionsglied ist.

Endlich ist die Wärmemenge, die im Raume II_b durch die Fläche strömt, die durch Rotation von UT um die Cylinderaxe entsteht

$$W_{IIb} = 2\pi k [\psi(U) - \psi(T)].$$

Es ist wiederum

$$\psi(U) = -\frac{P}{b} \frac{2b}{\pi} \log b,$$

$$\psi(T) = -\frac{P}{b} \left[R_1 - x_1 - \frac{b}{\pi} \log \left(\frac{2}{b^2} \right) - \frac{b}{2} \right],$$

$$W_{IIb} = 2\pi k \frac{P}{b} \left[R_1 - x_1 - \frac{b}{\pi} \log 2 - \frac{b}{2} \right].$$

Hier ist nun die Frage, welcher Werth für P zu wählen ist, so dass er mit der möglichsten Annäherung den vorliegenden Fall durch den ersetzt, dass die Entfernung aller Punkte der Fläche $A_1 E_1 R N$ von der Rotationsaxe dieselbe wäre. Eine genaue Antwort auf diese Frage lässt sich nicht geben, plausibel aber erscheint es, für den Werth von P , der ja den Charakter eines Durchschnittswertes der Entfernungen aller jener Punkte von der Rotationsaxe hat, die Entfernung des Mittelpunktes M_1 der Mittellinie TU , also

$$\left(\frac{R_1 + r_1}{2} + x_1 \right) \frac{1}{2}$$

zu nehmen. Die Genauigkeit des erhaltenen Resultates lässt sich allerdings nach dieser Methode schwer beurtheilen. Bei dieser Annahme ist

$$W_{IIb} = \pi k \left(\frac{R_1 + r_1}{2} + x_1 \right) \left(\frac{R_1 - x_1}{b} - \frac{\log 2}{\pi} - \frac{1}{2} \right).$$

Die gesammte zwischen den Deckflächen strömende Wärme ist

$$W_d = 2 [W_{III} + W_{IIb}] = \frac{2 \pi k R^2}{b} - 2 k (R + x_1) \log 2.$$

Das hier auftretende neue Correctionsglied ist

$$- 2 k (R + x_1) \log 2.$$

Bei dieser Rechnung fällt die willkürliche Grösse x_1 nicht aus, nur ihr Quadrat, was ja bei unseren mehrfach ungenauen Voraussetzungen nicht erstaunlich ist. x_1 kann Werthe zwischen 0 und R_1 annehmen, der bei Wahl von $x_1 = (R/2)$ entstehende mögliche Fehler kann also bis ein Drittel des Correctionsgliedes für die Deckflächen, ein Siebentel der gesammten Correction betragen. Wirklich wird er diese Grösse durchaus nicht erreichen, da ganz auszuschliessen ist, dass x_1 sehr nahe an einer der Grenzen 0 oder R_1 liegen wird. Wir könnten also $x_1 = (R/2)$ als besten Werth betrachten. In Erwägung indes, dass UT einerseits gross gegen b , andererseits klein gegen die Entfernung US von der Rotationsaxe sein sollte, werden wir UT als mittlere Proportionale, also

$$x = R \left(1 - \sqrt{\frac{2b}{R}} \right)$$

wählen. Dann ist

$$W_d = \frac{2 \pi k R^2}{b} - 2 k R \left(2 - \sqrt{\frac{2b}{R}} \right) \log 2.$$

Die gesuchte gesammte Wärmemenge, die in der Zeit-einheit von der inneren zur äusseren Fläche strömt, ist dem-nach:

$$\Omega = \frac{2 \pi k H}{\log R_1 - \log r_1} + \frac{2 \pi k R^2}{b} - 2 k R \left(4 - \sqrt{\frac{2b}{R}} \right) \log 2.$$

Oder, wenn man $x_1 = R/2$ wählt:

$$\Omega = \frac{2 \pi k H}{\log R_1 - \log r_1} + \frac{2 \pi k R^2}{b} - 7 k R \log 2.$$

Beide Ansätze fallen für $R = 8b$ zusammen; ist b/R sehr klein, so wird die ganze Correction klein; ist R/b wenig von $1/2$ verschieden, d. h. der innere Cylinder nahezu auf eine Gerade zusammengeschrumpft (Fall der Untersuchungen von Schleiermacher), so ist die ganze Berechnung nicht mehr genau, obgleich wohl noch benutzbar, im Allgemeinen wird der Unterschied der beiden Ansätze nicht von Belang sein.

Für den Fall, dass a nicht gleich b ist, erhält man nach derselben Methode.

$$W_I = \frac{2\pi k \left(\frac{H_1}{2} - Y_1 \right)}{\log R_1 - \log r_1}; \quad W_{III} = \frac{\pi k x_1^2}{b}$$

$$\psi(U) = R \left[\frac{Y_1}{a} - \frac{1}{\pi} \log \left(\frac{4a^2b^2}{a^2+b^2} \right) - \frac{2b}{\pi a} \operatorname{arctg} \left(\frac{b}{a} \right) \right]$$

$$\psi(T) = -P \left[\frac{x}{b} - \frac{1}{\pi} \log \left(\frac{4}{a^2+b^2} \right) - \frac{2a}{\pi b} \operatorname{arctg} \left(\frac{a}{b} \right) \right].$$

Für $\psi(U)$ wird man das eine Mal $-(R\lambda/b)$, das andere Mal $-(P\lambda/b)$ setzen, wobei λ als reeller Theil von ζ zu entnehmen ist aus:

$$\frac{a+b+i}{2} = \frac{b}{\pi} \log \left(\frac{u+1}{u-1} \right) + \frac{a+i}{\pi} \log \left(\frac{u+i \frac{a}{b}}{u-i \frac{a}{b}} \right); \quad u = \sqrt{\frac{\frac{\pi\zeta}{e^b+a^2}}{\frac{\pi\zeta}{e^b-b^2}}}$$

Dann ist also:

$$W_{IIa} = 2\pi k R \left[\frac{Y_1}{a} - \frac{1}{\pi} \log \left(\frac{4a^2b^2}{a^2+b^2} \right) - \frac{2b}{\pi a} \operatorname{arctg} \left(\frac{b}{a} \right) + \frac{\lambda}{b} \right],$$

$$W_{IIb} = 2\pi k P \left[\frac{R_1 - x_1}{b} - \frac{1}{\pi} \log \left(\frac{4}{a^2+b^2} \right) - \frac{2a}{\pi b} \operatorname{arctg} \left(\frac{a}{b} \right) - \frac{\lambda}{b} \right]$$

$$\begin{aligned} \Omega &= \frac{2\pi k H}{\log R_1 - \log r_1} + \frac{2\pi k R^2}{b} + \frac{2bRk}{a} \left(\pi - 4 \operatorname{arctg} \frac{b}{a} \right), \\ &+ \frac{aRk}{b} \left(\pi - 4 \operatorname{arctg} \frac{a}{b} \right) - 4kR \log \frac{8a^2b^2}{(a^2+b^2)^{3/2}} + \frac{2\pi k \lambda R}{b}, \\ &- x_1 k \left[2 \log \left(\frac{4}{a^2+b^2} \right) + \frac{4a}{b} \left(\operatorname{arctg} \frac{a}{b} - \frac{\pi}{4} \right) + \frac{2\pi\lambda}{b} \right], \end{aligned}$$

was für $a = b$, also $\lambda = (2b/\pi) \log b$ die obige Formel gibt:

$$\Omega = \frac{2\pi k H}{\log R_1 - \log r_1} + \frac{2\pi k R^2}{b} - 2k(3R + x_1) \log 2.$$

Die bisherigen Untersuchungen zeigen den Mangel, dass es sehr schwer ist, den Grad der Genauigkeit der Formeln zu

beurtheilen. Etwas mehr in dieser Beziehung leisten die folgenden, ähnlichen Betrachtungen des Problems.

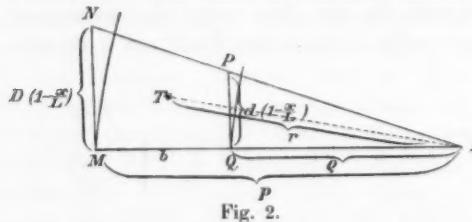
Denkt man sich ein Rechteck von den Seiten L und b , wählt eine Ecke als Anfangspunkt, die Seiten L zur x -, b zur y -Axe, und gibt jedem Punkte des Rechtecks die zur Koordinatenebene senkrechte Dicke:

$$\left(D - \frac{D-d}{b}y\right)\left(1 - \frac{x}{L}\right),$$

wo D und d gegebene Constanten sind, so ist jeder Schnitt des so entstandenen Keiles senkrecht zur Axe der x ein Trapez, in dem eine Seite b , die anliegenden Winkel rechte, die anliegenden Seiten

$$D\left(1 - \frac{x}{L}\right) \quad \text{und} \quad d\left(1 - \frac{x}{L}\right)$$

sind. Sind D und d unendlich klein (ihr Verhältniss endlich), so lässt sich das dann entstehende unendlich schmale Viereck



MNPQ (Fig. 2) als begrenzt von zwei unendlich kleinen concentrischen Kreisbögen und den entsprechenden Stücken der Radien auf

fassen. Ist nun S der Mittelpunkt der Kreise, ferner $QS = \varrho_1$, $MS = P$, und werden QP und MN auf der Temperatur 1 resp. 0 erhalten, so ist bekanntlich für einen Punkt T im $MNPQ$ mit der Entfernung r von S die Temperatur:

$$v = \frac{\log P - \log r}{\log P - \log q} = \frac{\log P - \log r}{\log D - \log d}$$

$$P = \frac{bD}{D-d}; \quad q = \frac{bd}{D-d}$$

Die Grösse P , also die Lage von S in der Ebene $MNPQ$, hängt, wie man sieht, nicht von x ab, ist also für alle Schnitte des Keiles senkrecht zur x -Axe analog, wir folgern daraus, dass in allen Punkten des Keils mit gleichem r die Temperatur dieselbe, demnach wirklich keine Wärmebewegung senkrecht zur Fläche $MNPQ$ vorhanden ist. Dasselbe würde stattfinden, wenn statt des Factors $(1 - (x/L))$ irgend ein an-

derer, $\varphi(x)$, die Abhängigkeit der Dicke des Keils von x angäbe, wofern nur

$$\left(D - \frac{D-d}{b} y \right)$$

die Abhängigkeit in bezug auf y angibt.

Geben wir der Fläche $MNPQ$ senkrecht zur Ebene der Zeichnung die Breite dx , so ist die von der einen Seitenfläche des entstehenden Körpers in der Zeiteinheit zur anderen gehende Wärmemenge:

$$dW = -k dx \cdot D \left(1 - \frac{x}{L} \right) \left(\frac{\partial v}{\partial r} \right)_P$$

$$= \frac{k(D-d) \left(1 - \frac{x}{L} \right) dx}{b(\log D - \log d)}.$$

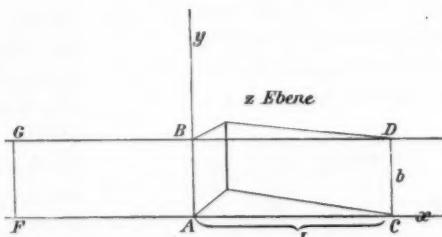


Fig. 3.

Durch den ganzen Keil geht also die exact bestimmte Wärmemenge:

$$W = \int_{x=0}^{x=L} dW = \frac{kL}{2b} \frac{D-d}{\log D - \log d}.$$

Nun bilden wir das Rechteck $ABCD$ (Fig. 3) als Theil eines geraden unendlichen Streifens wieder auf einen senkrecht gebrochenen unendlichen Streifen von der Breite b (Fig. 4) derart ab, dass die Bilder von A und B in die Eckpunkte A_1 und B_1 des gebrochenen Streifens z_1 fallen. Geben wir dann dem Bilde $A_1 B_1 C_1 D_1$ von $ABCD$ in jedem Punkte die senkrechte Dicke des entsprechenden Punktes, so ist auch die durch den über $A_1 B_1 C_1 D_1$ errichteten Körper strömende Wärme W .

Nach dem früheren ist die Formel für diese Abbildung

$$z_1 = x_1 + iy_1; \quad z = x + iy;$$

$$z_1 = \frac{b}{\pi} \left[\log \left(\frac{u+1}{u-1} \right) + i \log \left(\frac{u+i}{u-i} \right) \right]; \quad u = \sqrt{\frac{e^{\frac{\pi z}{b}} + 1}{e^{\frac{\pi z}{b}} - 1}}.$$

Dabei wird die Gerade AB in die Gerade A_1B_1 abgebildet, die Gerade CD dagegen in eine complicirte Curve C_1D_1 .

Zeichnen wir in Fig. 5 (p. 122) nochmals das in Fig. 1 dargestellte Viertel des Axenschnittes unseres gegebenen Hohlraumes, so können wir die Fläche $A_2B_2C_2D_2$ dort mit der Fläche $A_1B_1C_1D_1$ der Fig. 4 vergleichen. Legen wir nun noch einen zweiten, dem ersten unendlich benachbarten Axenschnitt durch die

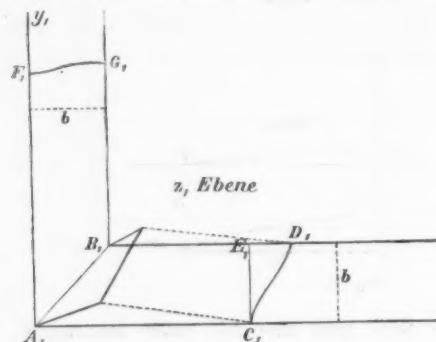


Fig. 4.

Cylinder, so erhalten wir über der Fläche $A_2B_2C_2D_2$ errichtet einen Keil, dessen Dicke, wenn A_2 der Anfangspunkt der x_2, y_2 ist, im Punkte x_2, y_2 durch

$\delta(1 - x_2/R_1)$ gegeben ist. Dabei ist δ die unend-

lich kleine Entfernung der beiden Axenschnitte am äusseren Cylindermantel. Diesen Keil vergleichen wir mit dem über $A_1B_1C_1D_1$ errichteten Körper. Die durch den letzteren strömende Wärmemenge ist exact bekannt.

Beide Körper unterscheiden sich in bezug auf ihre Dicke und die Begrenzung auf der rechten Seite. Die Abbildungsformel zeigt aber, dass die Abscissen von C_1 und D_1 sehr wenig voneinander abweichen, also, da die Tangente der Curve C_1D_1 stets einen spitzen (höchstens rechten) Winkel mit der positiven Abscissenaxe bildet, C_1D_1 sehr nahe eine Parallel zur Ordinatenaxe, ganz wie C_2D_2 , ist, wenn nur L einigermaassen grösser als b , z. B. $L \equiv 3b$ ist, was bei allen bisher

benutzten Apparaten zutrifft. Es ist nämlich für $x = L$, $y = 0$, also für Punkt C_1 :

$$x'_1 = \frac{b}{\pi} \left[\log \left(\frac{u_1 + 1}{u_1 - 1} \right) + 2 \operatorname{arctg} \frac{1}{u_1} \right]; \quad u_1 = \sqrt{\frac{e^{\frac{\pi L}{b}} + 1}{e^{\frac{\pi L}{b}} - 1}}.$$

Für $x = L$, $y = b$, also Punkt D_1 ist:

$$x''_1 = \frac{b}{\pi} \left[\log \left(\frac{1 + u_2}{1 - u_2} \right) + 2 \operatorname{arctg} \frac{1}{u_2} \right]; \quad u_2 = \sqrt{\frac{e^{\frac{\pi L}{b}} - 1}{e^{\frac{\pi L}{b}} + 1}} = \frac{1}{u_1}.$$

Somit ist:

$$x''_1 - x'_1 = \frac{2b}{\pi} \left(\operatorname{arctg} u_1 - \operatorname{arctg} \frac{1}{u_1} \right),$$

also für $L = 3b$ schon kleiner als $b/16000$. Dass die Tangenten von $C_1 D_1$ mit der positiven Abscissenaxe spitze Winkel bilden, d. h. dass dy_1/dx_1 bei Zunahme von y immer positiv ist, also $\partial y_1/\partial y$ und $\partial x_1/\partial y$ dasselbe Zeichen haben, zeigt sich so. Es ist:

$$\frac{\partial x_1}{\partial y} + i \frac{\partial y_1}{\partial y} = \frac{\partial x_1}{\partial y} = i \frac{dx_1}{dx};$$

also $\partial x_1/\partial y$ der negativ genommene imaginäre Theil von:

$$\frac{dx_1}{dx} = \sqrt{\frac{e^{\frac{\pi}{b}(x+iy)} + 1}{e^{\frac{\pi}{b}(x+iy)} - 1}}.$$

Die Wurzel ist positiv zu nehmen. Somit ist:

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dx} &= \sqrt{\frac{\frac{2\pi x}{b} - \frac{\pi x}{b} - \frac{\pi y}{b}}{\frac{2\pi x}{b} + 1 - 2e^{\frac{\pi}{b}} \cos \frac{\pi y}{b}}} = \sqrt{M(\cos p + i \sin p)} \\ &= \sqrt{M} \left(\cos \frac{p}{2} + i \sin \frac{p}{2} \right). \end{aligned}$$

Dabei ist p negativ (im vierten Quadranten), da der reelle Theil der Grösse unter der Wurzel bei uns positiv, der imaginäre negativ ist. Demnach haben der reelle und der imaginäre Theil von dx_1/dx , wie behauptet, verschiedenes Vorzeichen.

Man kann also mit ausserordentlicher Annäherung $C_1 D_1$ als Gerade und Senkrechte auf $A_1 C_1$ ansehen und zugleich L so wählen, dass mit dieser Annäherung die Fläche $A_2 B_2 C_2 D_2$ mit der Fläche $A_1 B_1 C_1 D_1$ zusammenfällt; dies geschieht, wenn man L aus den obigen Formeln für x'_1 oder x''_1 gleich R_1 , oder noch genauer $x'_1 + x''_1 = 2 R_1$ gesetzt, berechnet.

Dann ist

$$2 R_1 = 2 \frac{b}{\pi} \left[\log \left(\frac{u_1 + 1}{u_1 - 1} \right) + \operatorname{arctg} \frac{1}{u_1} + \operatorname{arctg} u_1 \right]$$

$$u_1 = \sqrt{\frac{\frac{\pi L}{e^{\frac{b}{\pi}} + 1}}{\frac{\pi L}{e^{\frac{b}{\pi}} - 1}}}.$$

Daraus folgt

$$L = R_1 - b \left(\frac{1}{2} + \frac{\log 2}{\pi} \right) + \frac{b}{\pi} \log \left(1 + \frac{1}{C^2} \right); \quad C = e^{\pi \left(\frac{R_1}{b} - \frac{1}{2} \right)}.$$

Da in der Anwendung C gross ist, ist sehr genau

$$L = R_1 - b \left(\frac{1}{2} + \frac{\log 2}{\pi} \right) + \frac{b}{\pi e^{\frac{2}{\pi} \left(\frac{R_1}{b} - \frac{1}{2} \right)}},$$

oder sogar

$$L = R_1 - b \left(\frac{1}{2} + \frac{\log 2}{\pi} \right) = r_1 + b \left(\frac{1}{2} - \frac{\log 2}{\pi} \right).$$

Diese Entwicklung lässt die Genauigkeit der Formel gut beurtheilen.

Um eine erste Annäherung für die Lösung unseres Problems zu gewinnen, berechnen wir statt der gesuchten Wärmemenge die, welche durch den Keil der Fig. 4 geht, wenn wir die Dicke D im Punkt A_1 gleich der δ im Punkte A_2 , die Dicke d in B_1 gleich der $\delta(r_1/R_1)$ in B_2 setzen. Dann sind mit der oben dargelegten, sehr grossen Genauigkeit die Oberflächen $A_1 B_1 C_1 D_1$ und $A_2 B_2 C_2 D_2$ gleich, die Dicke sowohl in $C_2 D_2$, als auch in der sehr nahe mit $C_2 D_2$ der Lage nach identischen $C_1 D_1$ ist 0, in den anderen Eckpunkten A_1 und A_2 , B_1 und B_2 je dieselbe. Allerdings ist sonst die Dicke nicht dieselbe, man sieht, dass sie in der Geraden $A_1 C_1$ von A_1 aus anfangs langsamer abnehmen wird, als in $A_2 C_2$ von A_2 aus, umgekehrt in $B_1 D_1$ von B_1 aus anfangs rascher als in $B_2 D_2$ von B_2 aus aus, dass also im Allgemeinen in $A_1 C_1$ die Dicke grösser sein

wird, als im entsprechenden Punkte von $A_2 C_2$, in $B_1 D_1$ kleiner als in $B_2 D_2$. Diese Abweichungen wirken sich in analoger Weise entgegen. Ferner ist die Dicke in $A_1 B_1$ im Allgemeinen grösser als die in den entsprechenden Punkten von $A_2 B_2$, was unser Resultat zu gross machen wird. In diesen Abweichungen zeigt sich eben auch die Wirkung des Vorhandenseins der Ecke, aber nur die zweiter Ordnung, die erster Ordnung haben wir gewissermassen mitgenommen.

Diese Annäherung gibt

$$W = \frac{k L}{2 b} \frac{\left(1 - \frac{r_1}{R_1}\right) \delta}{\log R_1 - \log r_1}.$$

Zwischen den Cylinderdeckflächen strömt also in der Zeit-einheit, da $\delta = R_1 d\varphi$ ist

$$\Omega_1 = 2 \int W = 2 \int_0^{2\pi} \frac{k L}{2 b} \frac{(R_1 - r_1)}{\log R_1 - \log r_1} d\varphi = \frac{2\pi k L (R_1 - r_1)}{\log R_1 - \log r_1}.$$

Dafür kann man ziemlich genau setzen

$$\Omega_1 = \frac{\pi k L (R_1 + r_1)}{b} = \frac{2\pi k R}{b} \left(R - \frac{b \log 2}{\pi}\right).$$

Diese Formel folgte aus der Betrachtung des Problems nach Kirchhoff's Methode, wenn man die Willkürliche x_1 gleich 0 setzte. Sie repräsentirte auch dort einen zu grossen Werth und hatte den Character eines Grenzwertes.

Wir vergleichen nun die Oberflächen, die bei dem fraglichen Keil (V) und bei dem fingirten (IV) auf den Temperatur 1 und 0 erhalten werden. Bei dem ersten sind sie $d r_1 / 2$ und $D R_1 / 2$; bei dem zweiten

$$\int_b^{x_1''} d \left(1 - \frac{x}{L}\right) d x_1 \text{ und } \int_0^{x_1'} D \left(1 - \frac{x}{L}\right) d x_1.$$

Führt man

$$d x_1 = \sqrt{\frac{\frac{\pi x}{b} - 1}{\frac{\pi x}{b} + 1}} d x \text{ resp. } d x_1 = \sqrt{\frac{\frac{\pi x}{b} + 1}{\frac{\pi x}{b} - 1}} d x$$

ein, so sind die auftretenden Integrale theils direct, theils

leicht durch convergente Reihen bestimmbar, und es sind schliesslich die gesuchten Oberflächen genügend genau

$$\frac{d r_1}{2} = \frac{d b}{2} \left[\frac{1}{2} - \frac{\log 2}{\pi} - \frac{11}{6} \frac{b}{\pi^2 L} \right]$$

und

$$\frac{D R_1}{2} + \frac{D b}{2} \left[\frac{1}{2} + \frac{\log 2}{\pi} - \frac{5}{2} \frac{b}{\pi^2 L} \right].$$

Wie vorauszusehen, weichen die Werthe für die Flächen constanter Temperatur des fingirten Keiles nicht ganz unerheblich von den entsprechenden Werthen beim fraglichen Keil ab. Wir werden, da wesentlich die Summe beider Oberflächen in die Formel für die gesuchte Wärmemenge eintritt, eine correctere Näherung erhalten, wenn wir statt des zuerst fingirten Keiles einen ähnlichen annehmen, bei dem die Summe der Oberflächen constanter Temperatur gleich der analogen Summe beim fraglichen Keil ist, wenn wir also die oben erhaltene Wärmemenge mit dem Quotienten

$$\frac{d r_1 + D R_1}{d r_1 + D R_1 + \frac{b}{2} (D - d) + \frac{b \log 2}{\pi} (D + d) - \frac{b^3}{\pi^2 L} \left(\frac{5 D}{2} - \frac{11 d}{6} \right)},$$

oder, unter den vorliegenden Verhältnissen genau genug, mit dessen Annäherung $1 - (b \log 2 / R)$ multipliciren, wodurch die gesuchte Wärmemenge angenähert den Werth

$$\Omega_2 = \frac{2 \pi k R^2}{b} - 4 k R \log 2$$

annimmt, d. h. den Werth, den die Kirchhoff'sche Methode für $x_1 = R$ ergiebt, also den unteren Grenzwerth.

Mittelst der angegebenen Methode sollen nun Grenzen für die zwischen den Deckflächen strömenden Wärmemenge gesucht werden. Zunächst sind

$$\frac{2 k \pi R_1^2}{b} \quad \text{und} \quad \frac{2 k \pi r_1^2}{b}$$

von selbst sich darbietende Grenzen, aber sehr weite.

Wir wählen die Dicken D und d in den Punkten A_1 und B_1 des fingirten Keiles derart, dass überall in der oberen und der unteren Begrenzung desselben die Dicke grösser ist, als im entsprechenden Punkt des fraglichen Keiles. Die Differenz beider Dicken sei A . Vergleichen wir nun die beiden Keile, indem wir $A_1 C_1$ gleich $A_2 C_2$ machen, so findet

nach dem Früheren jeder Punkt der Fläche $A_2 B_2 C_2 D_2$ einen entsprechenden innerhalb der Fläche $A_1 B_1 C_1 D_1$, umgekehrt aber nicht. Im Punkte A_1 sei die Dicke dieselbe wie in A_2 , also $D = \delta$; $\Delta = 0$; ebenso ist sie in C_1 wie in C_2 0, also auch hier $\Delta = 0$. Wählen wir nun d so dass Δ auf $A_1 C_1$ (resp. $A_2 C_2$) kein Minimum hat, so ist, wie gefordert, Δ dort überall positiv. In B_1 ist die Dicke, wenn wir $d > (\delta r_1/R_1)$ wählen, grösser als in B_2 ; in dem D_2 analogen Punkte E_1 (Fig. 4) ist sie nach den Voraussetzungen sicher positiv, in $D_2 = 0$; wählen wir also d so, dass Δ auch zwischen B_1 und E_1 kein Minimum hat, so ist auch für die obere Begrenzung die Forderung $\Delta > 0$ überall erfüllt.

Es ist allgemein für die unteren Grenzen der beiden Streifen

$$\Delta = D \left(\frac{L_1 - x}{L_1} \right) - \delta \left(\frac{R_1 - x_1}{R_1} \right),$$

wo L_1 aus

$$R_1 = \frac{b}{\pi} \left[\log \left(\frac{u+1}{u-1} \right) + 2 \arctg \frac{1}{u} \right]; \quad u = \sqrt{\frac{e^{\frac{b}{\pi} x} + 1}{e^{\frac{b}{\pi} x} - 1}}.$$

zu bestimmen, und bis auf eine zu vernachlässigende Grösse gleich dem früheren L ist. Somit ist

$$\frac{d\Delta}{dx} = -\frac{D}{L_1} + \frac{\delta}{R_1} \frac{dx_1}{dx} = -\frac{D}{L_1} + \frac{\delta}{R_1} \sqrt{\frac{\frac{\pi x}{e^{\frac{b}{\pi} x}} + 1}{\frac{\pi x}{e^{\frac{b}{\pi} x}} - 1}}.$$

Es tritt ein Maximum auf für

$$x = \frac{b}{\pi} \log \left(\frac{\delta^2 L_1^2 + R_1^2 D^2}{R_1^2 D^2 - \delta^2 L_1^2} \right), \quad \text{da } \frac{d^2 \Delta}{dx^2} < 0$$

für positive x , also überall im Intervalle, negativ ist. Ein Minimum existiert dort nicht, die erste Forderung ist also erfüllt.

Für die obere Grenze der Streifen ist

$$\Delta = d \left(\frac{L_1 - x}{L_1} \right) - \delta \left(\frac{R_1 - x_1}{R_1} \right).$$

$$\frac{d\Delta}{dx} = -\frac{d}{L_1} + \frac{\delta}{R_1} \sqrt{\frac{\frac{\pi x}{e^{\frac{b}{\pi} x}} - 1}{\frac{\pi x}{e^{\frac{b}{\pi} x}} + 1}}.$$

Hier existiert ein Minimum für

$$x = \frac{b}{\pi} \log \left(\frac{\delta^2 L_1^2 + d_1 R_1^2}{\delta^2 L_1^2 - d^2 R_1^2} \right),$$

das aber aus dem Intervall herausrückt, wenn

$$\frac{b}{\pi} \log \left(\frac{\delta^2 L_1^2 + d^2 R^2}{\delta^2 L_1^2 - d^2 R_1^2} \right) \geq L_1$$

wird, woraus

$$d \geq \frac{\delta L_1}{R_1} \sqrt{\frac{\frac{\pi L_1}{e^b} - 1}{\frac{\pi L_1}{e^b} + 1}}$$

folgt, und womit zugleich die letzte Forderung $d \geq (\delta r_1 / R_1)$ erfüllt ist. Genügend genau ist auch der Ansatz $d = (\delta L_1 / R_1)$ oder sogar $d = (\delta L / R_1)$. Wählen wir also $D = \delta$ und $d = (\delta L / R_1)$, so ist unser fingirter Keil überall an den auf konstanter Temperatur erhaltenen Endflächen dicker als der vorliegende fragliche. Zugleich wird die Oberfläche der letzteren in der Ebene der Figur von der entsprechenden des ersteren vollständig überdeckt. Nun ist freilich damit nicht streng bewiesen, dass in durchaus allen Punkten der Fläche $A_1 B_1 C_1 D_1$ die Dicke grösser ist, als in den entsprechenden von $A_2 B_2 C_2 D_2$ also auch nicht, dass die durch den fingirten Keil gehende Wärmemenge Ω grösser ist, als die durch den fraglichen gehende, doch wird bei genauer Ueberlegung der durch die Abbildung gegebener Verhältnisse an letzterem kein Zweifel bleiben. Dann wäre also eine obere Grenze für Ω

$$\Omega_{\text{ob}} = k \frac{L_1}{b} \frac{\left(1 - \frac{L_1}{R_1}\right)}{\log R_1 - \log L_1} \int_0^{2\pi R_1} \delta$$

$$= \frac{\pi k L_1}{b} (R + L_1).$$

Wählt man $B_1 D_1 = B_2 D_2$; d. h. bestimmt L_2 aus der Gleichung:

$$R_1 = \frac{b}{\pi} \log \left[\left(\frac{u+1}{1-u} \right) + 2 \operatorname{arctg} \frac{1}{u} \right]; \quad u = \sqrt{\frac{\frac{\pi L_2}{e^b} - 1}{\frac{\pi L_2}{e^b} + 1}},$$

wobei wieder L_2 sehr wenig von L abweicht, so wird die Fläche des fingirten Streifens von dem fraglichen durchaus überdeckt. Wählt man:

$$D \equiv \frac{d L_2}{R_1} \sqrt{\frac{\frac{\pi L_2}{e^b} - 1}{\frac{\pi L}{e^b} + 1}},$$

so ist kein Maximum von Δ zwischen A_1 und C_1 auf $A_1 C_1$ vorhanden, also, da in A_1 und C_1 Δ negativ ist, ist Δ überall auf $A_1 C_1$ negativ. Wählt man ferner $d = (\delta r_1 / R_1)$, so ist für B_1 und D_1 $\Delta = 0$, und zwischen B_1 und D_1 existirt kein Maximum, somit ist überall auch auf $B_1 D_1$ Δ negativ.

Es ist dann überall an den auf constanter Temperatur erhaltenen Flächen die Dicke des fingirten Keiles kleiner als die des fraglichen, ebenso die Oberfläche des ersten in der Ebene der Figur kleiner als die des letzteren, im Ganzen wird auch für innere Punkte der erste Keil geringere Dicke habe als der zweite, obwohl es nicht für alle Punkte beweisbar ist; es wird hier die durch den fingirten Keil gehende Wärmemenge kleiner sein, als die durch den wirklich vorliegenden gehende. Eine untere Grenze für Ω ist also:

$$\Omega_{ug} = k \frac{L_2}{b} \frac{1 - \frac{r_1}{L_2}}{\lg L_2 - \lg r_1} \int_0^{2\pi R_1} \delta \frac{L_2}{R_1} = \frac{\pi k L_2 (L_2 + r_1)}{b}.$$

Bei beiden Grenzen können wir L statt L_1 und L_2 einsetzen, die Differenz beider ist dann $4 k L$, die Grenzen sind vierfach enger, als die zuerst angesetzten. Die obere Grenze ist:

$$\Omega_{og} = \frac{2 \pi k R^2}{b} + k R (\pi - 4 \log 2) - b k \left(1 - \frac{2 \log 2}{\pi}\right) \log 2.$$

Dieser Werth liegt nur wenig über dem bisher als bester Werth für diese Wärmemenge betrachteten Ausdruck $2 \pi k R^2 / b$.

Der Mittelwerth zwischen den gefundenen Grenzen ist

$$\frac{\pi k L}{b} \left(2 R - \frac{b \lg 2}{\pi}\right).$$

Die nach der Kirchhoff'schen Methode gefundenen Formel war

$$\frac{\pi k L}{b} \left(2 R - \frac{b \lg 2}{\pi} \cdot \frac{2 x_1}{L}\right),$$

wobei x_1 zwischen 0 und R_1 liegen konnte. Wie man sieht, fallen beide Werthe zusammen, wenn man $x_1 = (L/2)$ setzt, was gut zu dem oben als plausibel erkannten Ansatz $x_1 = (R/2)$ stimmt.

Engere und ganz sichere Grenzen könnte man in jedem einzelnen Falle so finden. Es wurde früher bemerkt, dass die durch einen Keil, dessen eine Fläche ein Rechteck mit auf den Axen liegenden Seiten ist, fliessende Wärme berechenbar ist, wenn die Dicke in jedem Punkte durch

$$\varphi(x) \left(D - \frac{D-d}{b} y \right)$$

gegeben ist, wobei $\varphi(x)$ eine ganz beliebige Function von x ist. Diese Wärme ist

$$W = \frac{k(D-d)}{b(\log D - \log d)} \int_0^L \varphi(x) dx.$$

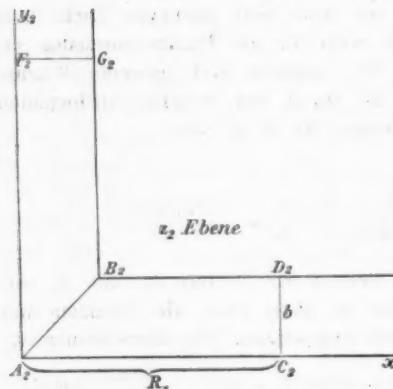


Fig. 5.

Wählen wir nun $\varphi(x)$ so, dass die Dicke an jedem Punkte des durch Abbildung entstandenen gebrochenen Streifens mindestens gleich der im analogen Punkte des gegebenen gebrochenen Streifens (Fig. 5) ist, so ist dafür der mathematische Ausdruck, dass im betrachteten Flächenraume für jedes x und jedes y überall

$$A = \varphi(x) \left[D - \frac{D-d}{b} y \right] - \delta \left(1 - \frac{x_1}{R_1} \right)$$

positiv ist.

Wählt man zugleich L so, dass der abgebildete Streifen den gegebenen vollständig überdeckt, so ist sicher die durch den so bestimmten fingirten Keil gehende Wärmemenge grösser, als die durch den gegebenen gehende; man erhält eine obere Grenze. Ganz ebenso findet sich eine untere Grenze.

Man müsste also $\varphi(x)$ aus:

$$\varphi(x) \left[D - \frac{D-d}{b} y \right] - \delta \left(1 - \frac{x_1}{R_1} \right) = 0$$

und

$$-\varphi(x) \frac{D-d}{b} + \frac{\delta}{R_1} \frac{\partial x_1}{\partial y} = 0$$

durch Elimination von y bestimmen. Die zweite Gleichung stellt die Bedingung für ein Maximum oder ein Minimum dar, je nach dem Vorzeichen von $\partial^2 x_1 / \partial y^2$. Dabei ist $\partial x_1 / \partial y$ der negative Factor von i in:

$$\frac{dx_1}{dx} = \sqrt{\frac{\frac{\pi}{b}(x+iy)}{e^{\frac{\pi}{b}(x+iy)} - 1} + 1}.$$

d/D wäre eine beliebige Constante und so zu wählen, dass die Grenzen möglichst eng würden.

Leider ist es bei der Complicirtheit der Formeln unmöglich, allgemein zu entscheiden, wo ein Maximum und wo ein Minimum aus jenen Gleichungen folgt, sowie, ob sie innerhalb des betrachteten Raumes liegen. Möglich erscheint allerdings, $\varphi(x)$ durch zahlenmässige Berechnung einer Reihe von einzelnen Werthen des Argumentes x angenähert als ganze Function zu finden, aber die Rechnung würde höchst langwierig.

Im Anschlusse soll noch auf eine andere Art eine Annäherung für die fragliche Wärmemenge gesucht werden. Man setze nämlich

$$\varphi(x)(D+d) = \delta \left(1 - \frac{x'_1}{R_1} \right) + \delta \left(1 - \frac{x''_1}{R_1} \right),$$

worin x'_1 und x''_1 die Abscissen der Bilder der Punkte $x, 0$ und x, b sind, also

$$x'_1 = \frac{b}{\pi} \left[\log \left(\frac{u+1}{u-1} \right) + 2 \operatorname{arctg} \frac{1}{u} \right]; \quad u = \sqrt{\frac{\frac{\pi x}{b} + 1}{\frac{\pi x}{b} - 1}}$$

$$x''_1 = \frac{b}{\pi} \left[\log \left(\frac{u+1}{1-u} \right) + 2 \operatorname{arctg} \frac{1}{u} \right]; \quad u = \sqrt{\frac{\frac{\pi x}{b} - 1}{\frac{\pi x}{b} + 1}}$$

Die Gleichung bedeutet, dass dann dem geraden Streifen eine derart mit der Abscisse x variirende Dicke gegeben wird,

dass die Summe der Dicken am Anfangspunkte und am Endpunkte jeder Stromlinie gleich der Summe der Dicken in den analogen Punkten des vorgelegten Keils ist. Die Grösse d/D wäre dann noch willkürlich, sie würde übrigens der Hauptsache nach herausfallen, da der im Resultate für die gesuchte Wärme allein sie enthaltende Factor

$$\frac{D-d}{(D+d)(\log D - \log d)}$$

sehr nahe $1/2$ wäre. Sonst würde man $D:d = R_1:r_1$ wählen, wodurch auch die Dicke in A_1 und A_2 , sowie in B_1 und B_2 gleich würde. Schliesslich ist, um die gesuchte Wärmemenge Ω_3 zu erhalten, der Ausdruck W zu integrieren, d. h. hier einfach δ durch $4\pi R_1$ zu ersetzen. Dann ist

$$\Omega_3 = \frac{2\pi k R_1}{b} \int_0^L \left[2 - \frac{2b}{\pi R_1} \log \left(\frac{\sqrt{\frac{\pi x}{e^b} + 1} + 1}{\sqrt{\frac{\pi x}{e^b} - 1} - 1} \right) - \frac{b}{R_1} \right] dz$$

Daraus folgt bei Vernachlässigung sehr kleiner Glieder:

$$\Omega_3 = \frac{2\pi k}{b} \left(L^2 + \frac{b^2}{4\pi^2} \right),$$

oder noch mehr abgekürzt

$$= \frac{2\pi k L^2}{b},$$

während wir anfangs die Annäherung

$$\Omega_2 = \frac{2\pi k L}{b} (L + b \log 2)$$

hatten. Das diesmalige Resultat ist wieder die nach der Kirchhoff'schen Methode gefundenen Formel, in der $x_1 = R$ gesetzt wurde, das frühere Resultat war dieselbe Formel für $x_1 = 0$. Beides sind die äussersten Grenzen von x_1 .

Ebenso, wie wir Näherungen für die zwischen den Deckflächen der Cylinder überströmende Wärme fanden, wollen wir nun auch die zwischen den Mantelflächen strömende Wärme suchen.

Man vergleicht den zwischen zwei unendlich nahen Axenschnitten und den Mantelflächen der Halbcylinder liegenden Raum, also einen unendlich dünnen Keil mit der Oberfläche $A_1 B_2 F_2 G_2$ (Fig. 5) mit einem fingirten Keil, dessen Oberfläche in der Ebene z_1 durch Abbildung eines Stückes eines geraden Streifen z von der Breite b mittels der Formel

$$z_1 = x_1 + iy_1 = \frac{b}{\pi} \left[\log \left(\frac{u+1}{u-1} \right) + i \log \left(\frac{u+i}{u-i} \right) \right]; \quad u = \sqrt{\frac{e^{\frac{\pi z}{b}} + 1}{e^{\frac{\pi z}{b}} - 1}}$$

gegeben ist. Gibt man dann dem geraden Streifen $ABFG$ (Fig. 3) wieder die Dicke

$$\left(D - \frac{D-d}{b} y \right),$$

so geht durch den so über $ABFG$ entstehenden Körper, wenn die Flächen über AF und BG auf den Temperaturen 0 und 1 erhalten werden, die Wärmemenge

$$W = k(AB) \frac{D-d}{b(\log D - \log d)}.$$

Dieselbe Wärmemenge geht auch durch den abgebildeten fingirten Keil. Nun bilde sich AB nach $A_1 B_1$ (Fig. 4) ab, das der Lage nach mit $A_2 B_2$ identisch sei, FG nach $F_1 G_1$, das sehr nahe mit $F_2 G_2$ zusammenfällt, AF nach $A_1 F_1$, BG nach $B_1 G_1$, die fast ganz mit $A_2 F_2$ und $B_2 G_2$ zusammenfallen. Dann ist, wenn $A_1 F_1 + B_1 G_1 = H$ ist, sehr genau (p. 116)

$$AF = \frac{H_1}{2} - b \left(\frac{1}{2} + \frac{\log 2}{\pi} \right)$$

$$W = \frac{k(D-d)}{b(\log D - \log d)} \left[\frac{H_1}{2} - b \left(\frac{1}{2} + \frac{\log 2}{\pi} \right) \right].$$

Ferner ist die Dicke des fingirten Keils *überall* gleich oder grösser als die im wirklichen, da bei der Abbildung die Linien gleicher Temperatur, die im geraden Streifen zugleich Linien gleicher Dicke sind, in Fig. 4 infolge des Vorhandenseins der Ecke nach rechts zusammengedrängt erscheinen.

Demnach ist der obige Ausdruck für W sicher etwas grösser, als die durch den wirklichen Keil gehende Wärmemenge, und für die durch die ganze Mantelfläche strömende Wärme erhalten wir einen etwas zu grossen Werth, wenn wir setzen

$$\Omega_m = 2 k \left[\frac{H_1}{2} + b \left(\frac{1}{2} + \frac{\log 2}{\pi} \right) \right] \frac{2 \pi R_1}{R_1 (\log R_1 - \log r_1)}$$

$$\Omega_m = \frac{2 \pi k \left(H - \frac{2 b \log 2}{\pi} \right)}{\log R_1 - \log r_1},$$

was der bei den Untersuchungen in Kirchhoffs Art gefundene Werth ist, den wir jetzt als etwas zu gross erkannt haben. Der Fehler ist ein solcher zweiter Ordnung.

Für zwei Cylinder, deren Mantelflächen um a , deren Deckflächen um b von einander abstehen, erhält man ähnliche Näherungen wiederum durch Vergleichung eines unendlich dünnen, ausgeschnittenen Keiles mit einem fingirten, dessen Oberfläche die Abbildung eines Stückes eines geraden Streifens ist, und den man dem gegebenen möglichst ähnlich zu machen sucht. Der gerade Streifen z wird sich aus zwei Theilen zusammensetzen, einem, dessen Dicke

$$\left(D - \frac{D-d}{b} y \right)$$

ist, und dessen Abbildung für das Stück zwischen den Mantelflächen eintritt, und einem zweiten, dessen Dicke, ausser in derselben Weise mit der Ordinate y , auch mit der Abscisse x variiert, und dessen Abbildung für einen Durchschnitt des Raumes zwischen den Deckflächen eintritt. Nur tritt hier die Schwierigkeit auf, dass der Verbindungsline $A_2 B_2$ der Ecken des gegebenen Keils nicht eine der Ordinatenaxe parallele Gerade des geraden Streifens entspricht, sondern eine complicirte Curve. Punkt A_1 des fingirten Streifens bildet sich durch die Formel

$$z_1 = \frac{b}{\pi} \log \left(\frac{u+1}{u-1} \right) + \frac{a i}{\pi} \log \left(\frac{u+i \frac{a}{b}}{u-i \frac{a}{b}} \right); \quad u = \sqrt{\frac{\frac{\pi z}{b} + a^2}{\frac{\pi z}{b} - b^2}}$$

nach

$$x = \frac{2b}{\pi} \log b, \quad y = 0;$$

Punkt B_1 nach

$$x = \frac{2b}{\pi} \log a; \quad y = b;$$

ab. Da wir aber die durch den geraden Streifen gehende Wärmemenge nur bestimmen können, wenn wir als Trennung der beiden oben definierten Theile eine Parallele zur Ordinaten-axe wählen, so wählen wir, um eine möglichst gute Annäherung zu erzielen, für deren Abscisse den mittleren Werth aus den beiden obigen, d. h. $(b/\pi) \log(ab)$. Für die Abscissen der anderen Grenzen der beiden Theile hatten wir früher mit grosser Genauigkeit gefunden.

$$L_1 = -\frac{bH_1}{2a} + \frac{b}{\pi} \log \left(\frac{4a^2b^2}{a^2+b^2} \right) + \frac{2b^2}{\pi a} \operatorname{arctg} \left(\frac{b}{a} \right),$$

$$L_2 = R_1 - \frac{b}{\pi} \log \left(\frac{4}{a^2+b^2} \right) - \frac{2a}{\pi} \operatorname{arctg} \left(\frac{a}{b} \right).$$

Es geht somit durch den ersten Theil die Wärmemenge

$$W_1 = \frac{k(D-d)}{b(\log D - \log d)} \left[\frac{bH_1}{2a} - \frac{b}{\pi} \log \left(\frac{4ab}{a^2+b^2} \right) - \frac{2b^2}{\pi a} \operatorname{arctg} \frac{b}{a} \right],$$

durch den zweiten Theil

$$W_2 = \frac{k(D-d)}{b(\log D - \log d)} \left[R_1 - \frac{b}{\pi} \log \left(\frac{4ab}{a^2+b^2} \right) - \frac{2a}{\pi} \operatorname{arctg} \left(\frac{a}{b} \right) \right].$$

Für die gesamte gesuchte Wärmemenge erhalten wir also folgende Annäherung

$$\Omega = \left[H_1 - \frac{3a}{\pi} \log \left(\frac{4ab}{a^2+b^2} \right) - \frac{4b}{\pi} \operatorname{arctg} \left(\frac{b}{a} \right) \right. \\ \left. - \frac{2a^2}{\pi b} \operatorname{arctg} \left(\frac{a}{b} \right) + \frac{aR_1}{b} \right] \frac{2\pi k}{\log R_1 - \log r_1} \\ a = R_1 - r_1; \quad b = \frac{H_1 - h_1}{2}.$$

Diese Formel ist identisch mit der nach der Kirchhoff'schen Methode entwickelten, wenn in dieser

$$x_1 = 0; \quad \lambda = \frac{b}{\pi} \lg(ab)$$

gesetzt wird. In der That mag vorzuziehen sein,

$$x_1 = \frac{R}{2}$$

zu setzen. Beide Formeln reduciren sich für $a = b$ auf früher schon fundene Näherungen.

Die gewonnenen Resultate kann man so zusammenfassen.

Wie bei der Kirchhoff'schen Methode die Willkürliche x_1 in das Resultat hineinkam, ohne jedoch zu grossen Abweichungen veranlassen zu können, und sehr plausibel gleich $R/2$ gewählt werden konnte, so schwanken auch die durch Vergleichung von Keilen erhaltenen Resultate in denselben Grenzen, und geben einen ganz ähnlichen Mittelwerth, für den man hier wie dort

$$\Omega = k \left[\frac{\pi (H_1 + h_1)}{\log R_1 - \log r_1} + \frac{\pi (R_1 + r_1)^2}{2(R_1 - r_1)} - \frac{7}{2}(R_1 + r_1) \log 2 \right]$$

erhält. Der dritte Term in der Klammer ist das gesuchte Correctionsglied, das seine Existenz dem Vorhandensein der Ecke verdankt und bisher nicht beachtet wurde. Es ist wahrscheinlich im allgemeinen etwas zu klein angesetzt, liegt aber sicher innerhalb der Grenzen $3(R_1 + r_1) \log 2$ und $4(R_1 + r_1) \log 2$.

Die Logarithmen sind überall natürliche.

Die erhaltene Formel wenden wir an, um nach den Versuchen von Winkelmann und Stefan die Wärmeleitungsfähigkeit der Luft neu zu berechnen.

Winkelmann setzte an

$$\Omega_1 = k \left[\frac{\frac{(h_1 - 2r_1)2\pi}{R_1(r_1 + h_1)}}{\log \frac{r_1(3R_1 + h_1 - 2r_1)}{}} - \frac{e}{R_1 - r_1} \right],$$

wo das Zusatzglied eine Correction wegen eines beide Cylinder verbindenden Glasrohres darstellt. Wir setzen

$$\Omega_2 = k \left[\frac{\pi (H_1 + h_1)}{\log R_1 - \log r_1} + \frac{\pi (R_1 + r_1)^2}{2(R_1 - r_1)} - \frac{7}{2}(R_1 + r_1) \log 2 - \frac{e}{R_1 - r_1} \right].$$

Bei dem Apparat II Winkelmann's ergab sich der Factor von k zu 232,39, nach unserem Ansatz ist der in Ω_2 225,74. Daraus fand Winkelmann $k = 555 \cdot 10^{-7}$.

Wir finden $k = 571,3 \cdot 10^{-7}$.

Der Apparat IV Winkelmann's gab nach seiner Berechnung $k = 568 \cdot 10^{-7}$.

Wir erhalten $584,5 \cdot 10^{-7}$.

Der Mittelwerth, mit dem Temperaturcoefficienten 0,0018 auf 0° reducirt, ist nach Winkelmann $555 \cdot 10^{-7}$, nach unserer Rechnung $571,5 \cdot 10^{-7}$.

Die Ansätze $x_1 = 0$ und $x_1 = R$, also die ungünstigsten

möglichen, würden $568 \cdot 10^{-7}$ bez. $574,3 \cdot 10^{-7}$ ergeben. Diese Werthe repräsentiren also die äussersten Fehlengrenzen.

Bei Anwendung von kugelförmigen Apparaten erhielt Winkelmann¹⁾ $k = 568,4 \cdot 10^{-7}$, und der Unterschied dieses Werthes und des von uns erhaltenen, etwa $\frac{1}{2}$ Proc., liegt ganz innerhalb der durch Beobachtungsfehler veranlassten Ungenauigkeiten.

Stefan setzte

$$\Omega_3 = \frac{\pi k [R_1 H_1 + r_1 h_1 + R_1^2 + r_1^2]}{R_1 - r_1}.$$

Seine Versuche ergeben einzeln bei Anwendung unserer Formel

bei Apparat I

$$k = 574,4 \cdot 10^{-7}; \quad k = 581,5 \cdot 10^{-7}; \quad k = 573,4 \cdot 10^{-7};$$

bei Apparat II

$$k = 587,1 \cdot 10^{-7}; \quad k = 593,5 \cdot 10^{-7};$$

bei Apparat III

$$k = 566,1 \cdot 10^{-7}; \quad k = 568,2 \cdot 10^{-7}; \quad k = 561,1 \cdot 10^{-7}.$$

Die Resultate aus Apparat II mussten zu gross ausfallen, da die Entfernung der Cylinder bei ihm mehr als ein Drittel des inneren Radius beträgt und deshalb einerseits das Auftreten von Luftströmungen begünstigt wurde, andererseits unsere Formel nicht mehr so genau ist. Das Mittel aus den übrigen Versuchen ist $k = 571,6 \cdot 10^{-7}$.

Freilich hat Stefan die Veränderlichkeit von k mit der Temperatur nicht beachtet. Schleiermacher²⁾ fand den Werth $562 \cdot 10^{-7}$, doch ist die Abweichung theilweise dadurch erklärlich, dass er als Temperaturcoefficienten 0,0029, Winkelmann 0,0018 setzte.

Zum Schluss fühle ich mich noch gedrängt, meinem verehrten Lehrer, Hrn. Geheimrath Boltzmann, auf dessen Anregung hin diese Arbeit entstand, meinen wärmsten Dank auszusprechen.

München, Mathematisch-physikalisches Seminar.

1) Winkelmann, Wied. Ann. **48**. p. 180. 1893.

2) Schleiermacher, Wied. Ann. **34**. p. 623. 1888.

8. Die Absorptionscoefficienten der Kohlensäure und des Schwefelwasserstoffs in Wasser bei dessen Gefrierpunkt; von K. Prytz und H. Holst.

Wenn man einen Gasstrom durch gestossenes Eis sendet, nimmt das Eis schnell eine Temperatur an, welche der Gefrierpunkt des durch das Gas unter Atmosphärendruck gesättigten Wassers ist. Dieses Phänomen ist von K. Prytz experimentell und theoretisch untersucht.¹⁾ Wenn Henry's Absorptionsgesetz Anwendung findet, wird, ohne Annäherungen einzuführen, gefunden

$$\frac{dT}{dP} = - \frac{\left(v_1 - v_2 + (1 - v_1 \varrho) \frac{T}{273} a \right) T}{\left(L - \frac{T}{273} a \varrho (L + D) - \frac{T}{273} a r U \right)}.$$

Hier bedeuten T die absolute Temperatur, P den Gasdruck, a den Absorptionscoefficienten bezogen auf die Gewichtseinheit des Lösungsmittels, v_1 das specifische Volumen des festen Körpers, v_2 das des flüssigen Körpers in der Lösung, r und ϱ die specifischen Gewichte des Gases resp. des Dampfes, L die Schmelzwärme des festen Körpers, D die Verdampfungswärme der Flüssigkeit und U die Lösungswärme des Gases in der Flüssigkeit. S ist das Wärmeäquivalent. Durch den Atmosphärendruck P_0 multiplizirt gibt dT/dP die auf 760 mm reducire Depression unter den dem Drucke Null entsprechenden Gefrierpunkt des reinen Wassers. Letzterer Punkt wird bei $+0,0099^{\circ}$ C. gefunden.

Unter anderen Gasen wurden Kohlensäure und Schwefelwasserstoff in Verbindung mit Eis untersucht. Die Versuche gaben für CO_2 $(dT/dP)P_0 = -0,156^{\circ}$ für $\text{SH}_2 - 0,392$. Mit den von Bunsen gegebenen Werthen für die Absorptions-

1) K. Prytz, Point de fusion de la glace au contact de corps gazeux. Danske Vidensk. Selsk. Forhdl. p. 151—166. 1893, Journal de Phys. (3) 2. p. 358—369, Beiblätter 17. p. 815.

coefficienten fanden sich aus der oben stehenden Formel die Zahlen $0,158^0$ und $0,377^0$.

Für Schwefelwasserstoff zeigte sich also ein bedeutender Unterschied zwischen der beobachteten und der nach dem von Bunsen angegebenen Absorptionscoefficienten berechneten Schmelzpunktsdepression. Es war deshalb wünschenswerth eine neue Bestimmung dieses Coefficienten zu bekommen. Die Verf. dieses Aufsatzes haben eine solche unternommen. Um die angewandte neue Methode, durch welche eine Genauigkeit von ungefähr 1 pro Mille angestrebt wurde, mit einem handlicheren Gase als Schwefelwasserstoff zu prüfen, wurde zuerst der Absorptionscoefficient der Kohlensäure bestimmt. In ihrer endlichen Gestalt war die angewandte Methode die folgende. Ein Kolben von ungefähr $\frac{1}{4}$ l hat oben zwei mit Hähnen verschlossene Zuleitungsrohren. Die eine Röhre mündet oben in dem Kolben, während die andere bis zum Boden geführt ist. Nachdem der Kolben zum grössten Theil mit luftfreiem Wasser gefüllt worden ist, ist die Aufgabe die folgende: 1. Das Gewicht Q des Wassers zu finden, 2. eine passende Menge des Gases im Wasser zu lösen und durch directe Wägung das Gewicht q dieser Menge zu finden, 3. den Gasdruck P , unter welchem die Wassermenge Q durch die Gasmenge q gesättigt ist, aufzufinden. Durch diese Methode entgeht man dem langweiligen Process: eine grösse Wassermenge unter einem voraus gegebenen Drucke vollständig zu sättigen. Die Temperatur war gewöhnlich 0^0 C., indem der Kolben während des letzten Theiles der Arbeit durch Eis umgeben war. Der Absorptionscoefficient ist

$$a = \frac{q \cdot 760}{q \cdot 0,001293 \cdot Q P},$$

wo q die Dichte des Gases bedeutet.

Das vorher ausgekochte Wasser wurde in den Kolben eingeführt, wonach der wasserfreie Raum des Kolbens mit einer Wasserluftpumpe in Verbindung gesetzt wurde. Durch langes Schütteln und Auspumpen in Verbindung mit gelindem Erwärmen wurde die Luft fast vollständig ausgetrieben. Jetzt wurde das Wasser gewogen. Bei allen Wägungen wurde ein dem Absorptionskolben ähnlicher, zugeschmolzener Kolben als Tara verwendet.

Der Gasentwickelungsapparat konnte das Gas bei etwas mehr als Atmosphärendruck abgeben. Die am Boden des Absorptionskolbens mündende Röhre wurde so mit dem Gasentwickeler verbunden, dass die Luft vollständig aus den Verbindungsrohren entfernt werden konnte. Der Hahn des Kolbens wurde vorsichtig geöffnet, wonach das Gas in Blasen durch das Wasser aufstieg. Der Kolben war in Eiswasser gesenkt und wurde, um die Absorption zu fördern, kräftig geschüttelt. Was dem Gase von fremden Gasen (den Bestandtheilen der Atmosphäre) beigemischt ist, häuft sich zum grössten Theil in dem verhältnissmässig kleinen Raume über dem Wasser an; um diese Anhäufung zu umgehen wurde, nachdem der Druck im Kolben grösser als der der Atmosphäre geworden war, einige Zeit hindurch auch der Hahn der in den Gasraum des Kolbens ausmündenden Röhre geöffnet, sodass das Gas den Kolben eine kurze Zeit durchströmte; diese Röhre war mit einer abgewogenen CaCl_2 Röhre, um die fortgeföhrte Wassermenge bestimmen zu können, verbunden. Dies wurde so lange fortgesetzt, bis man annehmen durfte, dass das Wasser bei 0° C. und bei ungefähr Atmosphärendruck mit dem Gase gesättigt war; dann wurden beide Hähne geschlossen.

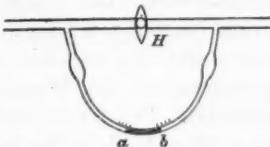
Jetzt wurde die Gewichtszunahme des Kolbens durch die aufgenommene Gasmenge gefunden. Der Kolben wurde stark geschüttelt, um die Concentrationsunterschiede auszugleichen und dann in reines gestossenes Eis die Nacht über gesetzt. Nachdem so das Wasser sicher die Temperatur 0° C. angenommen hatte, wurde die im Gasraume ausmündende Röhre des Kolbens durch eine biegsame Metallröhre mit einem Quecksilbermanometer verbunden. Mit demselben communicirte auch eine in ein Wasserbad angebrachte, unten mit Quecksilber gesperrte Röhre (ungefähr 100 ccm gross). Durch Heben oder Senken der Quecksilberfläche konnte man den Druck im Manometer variiren.

Zwischen dem Absorptionskolben und dem Manometer wurde die in beistehender Figur dargestellte Röhre eingeschaltet. Die unten gebogene, ca. 2 mm weite Seitenröhre war durch einen Tropfen Vaselinöl *ab* abgesperrt; derselbe diente, wenn der Hahn *H* geschlossen war, als Index für den gleichen Druck im Kolben und im Manometer. Der Raum zwischen

dieser Röhre und dem Kolben wurde mit dem in letzterem absorbirten Gase gefüllt. Da der Absorptionscoefficient annäherungsweise bekannt war, konnte man aus den schon gefundenen Werthen Q und q mit Annäherung den Druck im Absorptionskolben voraus berechnen. Der berechnete Druck wurde im Manometer und in den damit communicirenden Räumen hergestellt, worauf man, den Hahn des Kolbens vorsichtig öffnend, durch die Bewegung des Index ab erfuhr, ob man den Manometerdruck vergrössern oder verkleinern musste. So konnte man, in der Regel nach wenigen Proben, den Absorptionsdruck im Kolben bis auf einen Bruchtheil eines Millimeters finden. Der Kolben wurde häufig durch Schütteln des ganzen Eisbehälters energisch geschüttelt. Dies war nothwendig, um sich gegen Concentrationsunterschiede in verschiedenen Tiefen des Wassers zu sichern. Nachdem so die Drucke in Manometer und Kolben gleich gefunden waren, wurden Manometer und Barometer abgelesen und so wurde, nach Reduction auf 0° C. und nach Einführung verschiedener anderen unten zu erwähnenden Correctionen, der Absorptionsdruck P gefunden.

Es gelang nicht die Gase vollständig von den Bestandtheilen der Luft zu befreien, selbst wenn das Gas, wie es gewöhnlich geschah, aus dem Entwickelungsapparat mehrmals vor dem Gebrauche ausgepumpt wurde. Um das Resultat von dem hieraus entstehenden Fehler zu befreien, wurde das Gas im oberen Theil des Kolbens dadurch analysirt, dass es, nachdem die Druckmessung ausgeführt war, aus dem Kolben in eine mit Kalilösung gefüllte Messröhre übergetrieben wurde.

Es war ursprünglich unsere Absicht die Versuche in einfacherer Weise auszuführen. Das Gas sollte so lange durch das in dem Kolben abgewogene Wasser gehen, bis letzteres sich mit dem Gase unter Atmosphärendruck sicher sättigte. Das durch Verdampfen fortgeführte Wasser sollte durch die angesetzte Trockenröhre bestimmt werden. Die absorbirte Gasmenge sollte durch Wägung, wie in den endlichen Versuchen, bestimmt werden. Man konnte doch nicht auf diese Weise



sichere Resultate erhalten, theils weil die letzte Gasmenge sich ausserordentlich langsam löst, theils weil eine Unsicherheit über den Absorptionsdruck infolge des Wasserdruckes besteht; der Absorptionsdruck scheint am nächsten dem Bodendruck im Wasser zu entsprechen.

Bei der Berechnung des Endresultates sind mehrere Correctionen, welche jedoch alle mit genügender Sicherheit berechnet werden können, einzuführen. Die oben erwähnte Correction für das bei der Durchströmung der Luft mitgeführte Wasser (wenige mg) ist für die Bestimmung der Wassermenge (200—300 gr) ganz ohne Bedeutung; dagegen muss die absorbierte Gasmenge dadurch corrigirt werden. Um diese letzte Quantität zu finden, muss man das Gewicht des über dem Wasser stehenden Gases, und der im Wasser gelösten atmosphärischen Luft berechnen. Letzteres Gewicht ist sehr gering (ungefähr 0,2 mg). Das Volumen v_1 des freien Gases wird durch die verschiedenen Wägungen und durch die Volumenzunahme des Wassers wegen des Auflösens des Gases bestimmt. Das Gasvolumen v , welches in die durch das Resultat der Analyse bedingte Berechnung des Druckes der fremden Gase eingeht, ist gleich v_1 minus dem Volumen des in der Zuleitungsrohre stehenden Gases. Eine sehr kleine Correction am Gasgewicht wird dadurch veranlasst, dass während der Druckmessung ein geringer Austausch von Gas zwischen dem Kolben und der nach dem Manometer führenden Röhre stattfinden kann.

Der Absorptionscoefficient der Kohlensäure.

Dieses Gas wurde in den beiden endgültigen Versuchen in folgender Weise dargestellt. Es wurde zuerst eine hinlängliche Menge fester Kohlensäure aus der im Handel vorkommenden flüssigen erzeugt. So schnell wie möglich (um die Wasseraufnahme zu verringern) wurde die feste Kohlensäure gestampft, in Stücke zerschnitten und in ein Körbchen gebracht. Letzteres wurde mehrmals bis auf ungefähr 100 mm Druck entleert. Das Gas wurde weder gewaschen noch getrocknet, da man annehmen darf, dass die dadurch zu entfernenden Stoffe durch die niedrige Temperatur hinlänglich zurückgehalten werden.

Versuch I. Gewicht des Wassers $Q = 280,03$ g; Gewicht der ganzen Gasmenge $q_1 = 1,1280$; Gewicht fremder Gase (als atm. Luft berechnet) $\gamma_1 = 0,0005$; das Gewicht der Kohlensäure in dem Gasvolumen $v_1 = 40,3$ ccm wird γ_2 genannt, $\gamma_2 = 0,0872$; Gewicht der absorbierten Kohlensäure $q = 1,0403$ g.

Manometerhöhe $h = + 93,3$ mm; Barometerhöhe $H = 744,4$.

Die Analyse gab für fremde Gasen das Volumen $u = 0,39$ ccm bei 708 mm Druck und 20° . Dieselben hatten im Kolben das Volumen $v = 35,3$ ccm gefüllt. Hieraus berechnet sich der Druck der fremden Gase in dem Absorptionskolben zu $p = 7,3$ mm; der Druck des Wasserdampfes $\pi = 4,6$ mm. Der Absorptionsdruck wird nun:

$$P = H + h - \pi = 825,8 \text{ mm.}$$

Der Absorptionscoefficient bei 0°C. :

$$a_0 = \frac{q \cdot 760}{q \cdot 0,001293 \cdot Q \cdot P} = \frac{1,0403 \cdot 760}{1,529 \cdot 0,001293 \cdot 280,03 \cdot 825,8} = 1,7294.$$

Versuch IIa: $Q = 270,94$;

$q_1 = 1,0729$, $\gamma_1 = 0,0017$, $v_1 = 49,4$, $\gamma_2 = 0,1019$, $q = 0,9695$;

$$h = + 54,2, \quad H = 762,3;$$

$u = 1,16$ ccm bei 727 mm und 18° , $v = 44,4$, $p = 17,8$, $\pi = 4,6$;

$$P = 794,1;$$

$$a_0 = \frac{0,9695 \cdot 760}{1,529 \cdot 0,001293 \cdot 270,94 \cdot 794,1} = 1,7322.$$

Versuch IIb. Nachdem die Druckmessung im Versuch IIa ausgeführt war, wurde der Hahn des Absorptionskolbens geschlossen, und während 7 Stunden Kohlensäuregas in einem langsamem Strom durch das den Kolben umgebende Eis getrieben. Hierdurch sank die Temperatur des Eises auf den Schmelzpunkt des Eises in Kohlensäure (ca. $\div 0,15^\circ$). Der Eisbehälter und somit auch das Wasser im Kolben wurden längere Zeit hindurch um die Temperaturausgleichung zu fördern geschüttelt. Am Schlusse der 7 Stunden wurde der neue Absorptionsdruck gemessen. Es wurde gefunden:

$$h = + 52,4, \quad H = 761,6.$$

Erst nachdem diese Bestimmung gemacht worden war, wurde die Analyse des Gases im Kolben, deren Resultat unter

IIa gegeben ist, ausgeführt. Man findet $Q = 270,94$, $q = 0,9694$, $P = 791,6$, woraus der Absorptionscoefficient zu $1,7375$ bei $\div 0,15^{\circ}$ bestimmt wird.

Das Mittel aus den Resultaten der beiden Versuche I und IIa gibt den Absorptionscoefficient der Kohlensäure bei 0° C.

$$a_0 = 1,7308.$$

Die beiden beobachteten Werthe weichen um 0,8 pro mille vom Mittel ab, eine Genauigkeit, welche wohl der der Versuche entspricht. Beim Schmelzpunkte θ des mit Kohlensäuregas unter Atmosphärendruck umgebenen Eises ist, wie oben gefunden, der Coefficient $a_{\theta} = 1,7375$.

Bevor die schon besprochenen Versuche ausgeführt wurden, wurden zwei vorläufige Versuche gemacht; sie wurden nicht zur Bestimmung des a_0 benutzt, weil die Methode noch nicht so weit ausgebildet war, dass die Correctionen sicher berechnet werden konnten. Im ersten dieser Versuche fand ein kleiner Wasserverlust statt, und die Analyse des freien Gases war sehr unsicher. Das Resultat war $a_0 = 1,716$. Im zweiten Versuche blieb eine kleinere Unsicherheit über das Resultat der Analyse übrig; der Versuch gibt a_0 zwischen 1,725 und 1,737 liegend; das Mittel $a_0 = 1,731$ ist in guter Uebereinstimmung mit dem oben gefundenen Werthe.

Der Absorptionscoefficient des Schwefelwasserstoffes.

In den beiden endgültigen Versuchen mit diesem Gase, wurde das Gas durch Schwefelantimon und Salzsäure dargestellt. Im ersten Versuche wurde zuerst ca. 1 Liter ausgekochtes Wasser mit ausgewaschenem SH_2 bei 0° und Atmosphärendruck fast gesättigt. Nach einem Auspumpen des freien Gases wurde SH_2 durch Erwärmen aus dem Wasser ausgetrieben und trocken in den Absorptionskolben geführt. Im zweiten Versuche ging das Gas, sorgfältig gewaschen und getrocknet, direct vom Entwickelungsapparate in den Absorptionskolben.

Versuch I. $Q = 278,07$;

$$q_1 = 1,7586, \gamma_1 = 0,0010, v_1 = 41,2, \gamma_2 = 0,0537, q = 1,7037; \\ h = \div 101,8, H = 766,0;$$

$u = 0,84$ bei 734 mm und 15° , $v = 39,9$, $p = 14,6$, $\pi = 4,6$,

$$P = 645,0;$$

$$a_0 = \frac{1,7037 \cdot 760}{1,191 \cdot 0,001293 \cdot 278,07 \cdot 645,0} = 4,6879.$$

Versuch II. $Q = 263,75$;

$q_1 = 1,9076$, $\gamma_1 = 0,0027$, $v_1 = 55,4$, $\gamma_2 = 0,0818$, $q = 1,8232$;

$$h = +3,6, \quad H = 757,6;$$

$u = 1,94$ bei 726 mm und 16° , $v = 50,6$, $p = 26,3$, $\pi = 4,6$;

$$P = 730,3;$$

$$a_0 = \frac{1,8232 \cdot 760}{1,191 \cdot 0,001293 \cdot 263,75 \cdot 730,3} = 4,6714.$$

Das Mittel aus den Resultaten der beiden Versuche I und II gibt den Absorptionscoefficient des Schwefelwasserstoffes bei 0° :

$$a_0 = 4,6796.$$

Die beobachteten Werthe weichen um 1,8 pro Mille vom Mittel ab; diese Abweichung ist etwas grösser als die, welche man aus den Beobachtungsfehlern erwarten kann. Da die Drucke in den beiden Versuchen 85 mm verschieden waren, röhrt wahrscheinlich ein Theil des Unterschieds der Resultate vom Mangel an Gültigkeit der Gesetze von Mariotte und Henry her.

Die Werthe $a_0 = 1,7308$ für CO_2 und $a_0 = 4,6796$ für SH_2 weichen beide von dem von Bunsen angegebenen Werthen¹⁾ bedeutend ab. Bunsen gibt für CO_2 $a_0 = 1,7967$, einen Werth, welche 5,8 Proc. grösser als der von uns gefundene ist. Das Resultat Bunsens ist durch Extrapolation gefunden; die niedrigste Temperatur, bei welcher er den Coefficient bestimmt, ist $4,4^\circ$. Seine Berechnungsweise war aber, wie es von Henrich²⁾ gezeigt ist, eine wenig genaue; durch seine Neuberechnung findet Henrich für CO_2 $a_0 = 1,7326$ einen Werth, welcher so gut wie es nur zu erwarten wäre, mit dem unserigen übereinstimmt.

Nach Bunsen haben Schönfeld und Carius (l. c.) $a_0 = 4,3706$ gefunden. Der Werth ist 6,6 Proc. *kleiner* als der von uns gefundene. Es war schon in der oben citirten Arbeit von K. Prytz bemerkt, dass die von Bunsen für a_0

1) Bunsen, Gasom. Methoden. p. 219 u. 230. 1877.

2) Henrich, Ztschr. f. physich. Chem. 9. p. 435. 1892.

angegebene Zahl viel zu klein wäre; um das Wasser mit SH_2 unter Atmosphärendruck zu sättigen, liessen nämlich Schönfeld und Carius das Gas zwei Stunden lang durch das in einer Digerirflasche erhaltene Wasser strömen; „so darf man annehmen, dass der Sättigungsgrad erreicht ist“ wird hinzugefügt. Es folgt hieraus, dass in keiner Weise controllirt worden ist, in wie weit das Wasser wirklich gesättigt gewesen ist; nach unseren Erfahrungen können wir nicht daran zweifeln, dass das Wasser in keinem der Versuche Schönfeld's und Carius' gesättigt gewesen ist. Die Resultate dieser Versuche, welche zwischen den Temperaturen 2° und 43° ausgeführt sind, haben sicher nur geringen Werth. Durch seine Berechnung dieser Versuche findet Henrich für $\text{SH}_2 \alpha_0 = 4,4015$ einen Werth, welcher sich wohl dem unserigen nähert, der aber doch noch um 6 Proc. kleiner ist.

Wie oben erwähnt fand Prytz die Schmelzpunktsdepression des Eises in CO_2 gleich $\theta_{\text{CO}_2} = -0,156^\circ$ und in $\text{SH}_2 \theta_{\text{H}_2\text{S}} = -0,392$. Durch die p. 130 angeführte Formel und mit den neuen Werthen für die Absorptionscoefficienten findet man $\theta'_{\text{CO}_2} = -0,1523$ und $\theta'_{\text{SH}_2} = -0,4016$, wobei $L = 79,4$ und $J = 4,2 \cdot 10^{-7}$ gesetzt sind. Für CO_2 ist die Differenz $\theta' - \theta = 0,0037^\circ$ nicht grösser, als dass sie theils durch Beobachtungsfehler, theils durch Fehler in den Werthen für J und L erklärt werden kann. Dagegen deutet die Differenz für $\text{SH}_2 \theta' - \theta = -0,0096^\circ$ darauf hin, dass das Gas, welches für die Schmelzpunktsbestimmung verwendet wurde, merkliche Mengen eines fremden Gases mit kleinerem Absorptionscoefficient als SH_2 enthalten hat. Das Gas wurde damals aus Schwefelbaryum mit Salzsäure dargestellt. Dasselbe Präparat wurde zuerst von uns zu den Absorptionsversuchen verwendet; es gab für α_0 den Werth 4,502 und enthielt nach einer Analyse eine nicht unbedeutende Menge von Kohlensäure; die Menge entsprach den gefundenen Abweichungen sowohl im Schmelzpunkte als im Absorptionscoefficienten.

Kopenhagen, phys. Laborat. d. polytech. Lehranstalt.

mit
slich
durch
darf
wird
rollirt
t ge-
daran
höhn-
dieser
aus-
seine
,4015
, der

ession
0,392.
erthen
,1523
. 10⁻⁷
nicht
theils
werden
0096°
unknts-
emden
halten
Salz-
n uns
den
unt un-
h den
als im
nstalt.

9. Ueber das elastische Verhalten des Zinks bei verschiedenen Temperaturen; von Erich Zimansky.

(Hierzu Taf. I Fig. 1—13.)

Einleitung.

Während die Metalle im allgemeinen bei erhöhter Temperatur weicher und geschmeidiger werden, also ein weniger festes Gefüge zeigen, hat man beim Zink auffallende Cohäsionserscheinungen und Änderungen der Molecularstructur in höheren Temperaturen beobachtet, die bisher noch wenig studirt sind.

In einer Abhandlung: „Ueber den Einfluss der Wärme auf die Molecularstructur des Zinks“ führt Kalischer¹⁾ an, dass gewalztes Zink, wie Zinkdraht, auf höhere Temperaturen erhitzt, eine Reihe bleibender Veränderungen erleidet, deren Grund die bei 150° eintretende Krystallisation des Metalls ist.

Bei einer Untersuchung über den Ausdehnungskoeffizienten des Zinks berührt Heinemann²⁾ einige Fragen der Molecularstructur des in Rede stehenden Materials.

Bolley³⁾ bemerkt in seiner Arbeit über die Molecular-eigenschaften des Zinks, dass das bei möglichst niedriger Temperatur umgeschrmolzene Metall kernigen Bruch und grössere Dehnbarkeit habe, und durch diese Eigenschaften sich von dem bis nahe zum Rothglühen erhitzten Metall unterscheide.

Die Verschiedenheiten in der Geschmeidigkeit des Zinks sind nach den Angaben von Rammelsberg⁴⁾ nicht dadurch bedingt, dass dieses Metall in verschiedenen molecularen Modificationen existirt, sie liegen vielmehr in dem schnellen Uebergang aus dem flüssigen in den festen Zustand, wodurch die Sprödigkeit des Metalls erhöht wird.

1) Kalischer, Chem. Ber. 14. p. 2747—54. 1881.

2) Heinemann, Ueber thermische Nachwirkung von Zinkstäben Schulprogramm. Lyck 1891.

3) Bolley, Liebig Ann. 45. 294—306.

4) Rammelsberg, Berliner Monatsbericht. p. 225—233. 1880.

Schliesslich sei noch eine Arbeit von Le Chatelier¹⁾ angeführt, worin der Verfasser einen dünnen Draht in einer Messinghülse erhitzt und durch constanten Wasserzufluss belastet. Beobachtet wurden die während der Belastung bis zum Bruch eingetretenen Verlängerungen, wie das Bruchgewicht, wodurch der Verfasser findet, dass ein Zinkdraht von 15° bis 300° erwärmt bei gleichbleibender Belastung in höherer Temperatur eine grössere Verlängerung zeigt.

Es erscheint angebracht, auf Grund dieser zum Theil älteren Angaben eine Untersuchung über das elastische Verhalten des Zinks auszuführen, indem die durch Belastungen bei verschiedenen Temperaturen auftretenden Torsionen gemessen werden, wobei dann eventuell eintretende Structuränderungen hervortreten würden. Aufmerksam geworden auf die neueren Beobachtungsmethoden, welche für feine und sichere Messungen sich als äusserst brauchbar erwiesen haben, führte ich die vorliegenden Untersuchungen unter Leitung des Hrn. Geheimrath Prof. Dr. Wiedemann im physikalischen Institut der Universität Leipzig aus.

Apparat.

Die zu meinen Versuchen verwendeten Apparate sind dargestellt auf beifolgender Tafel. Fig. 1 stellt dieselben in ihrer Gesammtanordnung von vorn gesehen dar, Fig. 2. den Erwärmungssapparat, Fig. 3 den Belastungsapparat, beide von der Seite gesehen, alles in $\frac{1}{15}$ natürlicher Grösse. Die Detailskizzen Fig. 4 bis 6 sind aufgezeichnet in $\frac{1}{3}$ natürlicher Grösse, die Grundrisskizze des Erwärmungsapparates ist wieder in $\frac{1}{15}$ natürlicher Grösse veranschaulicht.

An beiden Enden der Versuchsstäbe *a*, Fig. 4, war ein Gewinde angeschnitten, auf welches 12 mm lange Messinghülsen *b* geschraubt waren. Dieselben wurden, um mit dem Stab vollständig ein Ganzes zu bilden, noch mit ihm verlöthet, und verhinderten eine Zerpressung des Stabquerschnittes infolge des festen Anziehens der drei Fassungsschrauben *c*, Fig. 5. Ueber die Messinghülsen wurden die durch Fig. 5 und 6 dargestellten Fassungen geschoben, welche mittelst der erwähnten drei Schrauben *c* den Stab festklemmten und im

1) Le Chatelier, Compt. rend. 109. p. 24—27.

Erwärmungsapparat festhielten. Dieser, ein Kupfercylinder *d* von 400 mm Länge, 68 mm Durchmesser und verticaler Axe, war durch starke Eisenstreben am Boden des Zimmers befestigt und hatte eine seitliche Ausbuchtung, um bei dem sonst kreisrunden Cylinder einen bequemen Gebrauch des Rührers zu ermöglichen. Das im Cylinder befindliche Oel wurde durch zwei um ihn herumgelegte Erwärmungsrohre *e*, im Grundriss in Fig. 7 dargestellt, die als Bunsenbrenner eingerichtet waren, auf höhere Temperaturen gebracht und diese durch ein Thermometer abgelesen, welches dem Versuchsstab möglichst nahe im Kupfercylinder hing. In der Bodenmitte des Kupfercylinders war ein innen conisch ausgebohrter Messingpropfen *f*, Fig. 6, eingelöthet, und in ihn passte die untere Fassung des Versuchstabes, die von unten her durch eine Schraubenmutter festgezogen das eine Ende des Versuchstabes festklemmte, zugleich aber auch ein Ablaufen des im Cylinder befindlichen Oeles verhinderte. Zur vollständigen Dichtung dienten zwei Asbestunterlegscheiben, die zugleich den Conus nur so fest anzuziehen gestatteten, dass ein schwacher Schlag genügte, um den Stab nach dem Versuch wieder aus dem Erwärmungscylinder herauszubringen. Ebenso wie das untere, war auch das obere Ende des Versuchstabes gefasst, die Fassung — Fig. 5 — ragte indess über den oben offenen Kupfercylinder hinaus und endete in einem Haken zur Aufnahme der spannenden Schnur, die über 2 Rollen am oberen Theil der Wand ging, am anderen Ende das Streckgewicht trug. Die erste dieser Rollen *g* war verschiebbar, so dass ihre Mittelebene und der Conus des Cylinderbodens genau in die Axe des Kupfercylinders fielen, wodurch eine Biegung des Versuchstabes ausgeschlossen war. Gleichfalls in dieser Axe befanden sich, während die obere Fassung des Versuchstabes seitlich ausgebogen war, an ihr 2 Stahlspitzen *h*, die in auf und ab beweglichen Hütchen *i* — Fig. 2 — eine seitliche Ausbiegung des Stabes infolge der Torsionsbelastung verhinderten. Die Hütchen *i*, zwei halbkreisförmig ausgedrehte Schraubenspitzen aus gehärtetem Stahl steckten in eisernen Armen *k*, die in der Wand befestigt waren, indess nach allen Richtungen hin verstellt werden konnten. Ueber der seitlichen Ausbiegung trug die obere Fassung den Torsionskreis *l*, an dessen

Peripherie, die zu einer Nuth ausgedreht war, die Belastung angriff und über dem Torsionskreis befand sich concentrisch zur Axe drehbar, aber 18 mm von ihr abstehend der Spiegel m , der das ihm gegenüber befindliche Scalenbild in ein über der Scala befindliches Fernrohr warf.

Die Scala selbst, ein zu einem Halbkreis von 955 mm Radius gebogener, und in dieser Lage durch Querleisten festgehaltener Blechstreifen von 10 cm Höhe, war concentrisch zum Versuchsstab aufgestellt und innen mit Millimeterpapier beklebt. Einer Drehung des Spiegels um 1° entspricht infolge der Proportion

$$1 : 360 = x : 955 \cdot 2 \pi \cdot 2$$

eine Verschiebung des Bildes der Scala um 33,3 Theilstriche.

Der Belastungsapparat, welcher gestattete die Stäbe durch genau messbare Kräfte zu torquiren, und die Torsion mit Sicherheit zu messen, ist derselbe, den G. Wiedemann¹⁾ bei seinen Torsionsuntersuchungen verwendet hat, und zeigt folgende Einrichtung: Um die Peripherie des Torsionskreises l war ein dünner Seidenfaden gewunden, dessen eines Ende am Torsionskreis fest war. Das andere Ende des Fadens ging über ein verticales, sehr leicht bewegliches und genau centritis Rad n . Wurden an das herabhängende Ende dieses Theiles des Fadens Gewichte angehängt, so bewirkten diese eine Drehung der Torsionsscheibe und damit eine Torsion des Versuchsstabes. Um indess, was bei den Versuchen von grosser Bedeutung ist, die Gewichte ohne jeden Stoss an die Schnur anhängen zu können, war das freie Fadenende an einem Rahmen o befestigt, der ähnlich einem Flaschenzug eine Rolle trug, und an welchem unten die Belastung wirkte. Dieser Rahmen hing vermittelst seiner Rolle in einer Schnur, die einerseits an den festen Haken p angeknüpft ist, andererseits bei q über 2 rechtwinkelig zu einander stehende Rollen bis zum Beobachter hingeführt ist, wo ihr Ende sich um eine 5 mm dicke Axe r legt, die mittelst einer Kurbel gedreht werden kann. Eine kleine Schraube rechtwinkelig zur Axe r ermöglichte es, diese in jeder Stellung fest zu klemmen. Um die hierbei stets durch die Torsion des drillenden Fadens ein-

1) G. Wiedemann, Pogg. Ann. 56. p. 160 und Wied. Ann. 6. p. 487.

tretende Drehung des Rahmens mit der Belastung zu vermeiden, war an den Rahmen *o* ein dünner Draht *s* angelöthet, an dem mittelst zweier Seidenfäden unterhalb des Belastungsfasses ein längeres, sehr dünnes und glattes Holzstäbchen *t* hängt, welches bei den Drehungen des Fadens gegen zwei verticale, feste Drähte *uu* schlägt, sobald beim Herunterlassen des Schnurlaufs *vv* die Rolle nicht mehr von letzterem, sondern von dem um den Kreis *l* geschlungenen Faden getragen wird. Durch diese Einrichtung werden etwaige Erschütterungen bei der langsamten Senkung der Rolle infolge der elastischen Nachwirkung im temporär tordirten Stab und bei dem dadurch stattfindenden Entlanggleiten des Drahtes *s* an *uu* vermieden. Um einerseits Erschütterungen des Stabes beim Auflegen der Gewichte völlig zu vermeiden, und andererseits die Belastung bis zu einem Maximum ebenso wie bis zur völligen Entlastung in cyklischer Aufeinanderfolge wirken zu lassen, diente ein äusserst leichtes Becherglas *w*, welches durch vier feste, aber sehr dünne Fäden an dem Rahmen *o* hing. Nahe seiner Axe senkte sich in das Becherglas bis wenige Millimeter über dem Boden eine ihn nirgends berührende Glasröhre von 3 mm lichter Weite, die in dem sie haltenden Stativ noch auf und abgeschoben werden konnte. Durch ein Kautschukrohr war diese Glasröhre mit einem Gefäss voll Wasser verbunden, durch dessen Höher- oder Tieferstellen der Wasserzu- und Abfluss bewerkstelligt werden konnte. Der untere Theil der Röhre war mit einem Baumwollstöpsel umwunden, sodass das Wasser durch die Röhre mit sehr geringer, durch den Hahn am grossen Wassergefäß genau zu regulirender Geschwindigkeit in das Becherglas floss und die Last möglichst ohne Stösse auf den Stab wirkte. Der am Torsionsapparat befestigte Spiegel blieb dann auch völlig unverändert stehen, als bei nicht tordirtem Stab und frei schwebenden Spitzen Wasser durch die Röhre in das Becherglas eingelassen wurde.

Das Gesamtgewicht der am Stab hängenden Minimalbelastung als Rahmen mit Rolle und Becherglas betrug bei den Stäben Nr. 1, 2, 3, 168,0 gr, die grösste Torsionsbelastung betrug 1000 g; bei den übrigen Versuchsstäben wog das leere Wassergefäß mit dem Rahmen 113,6 g, die grösste Torsionsbelastung belief sich auf 500 g. Das den Stab spannende

Gewicht betrug bei sämmtlichen gezogenen Stäben 14100 g, bei den gegossenen 5600 g.

Beobachtungsmethode.

Das zu den Versuchen dienende Material wurde in Stabform angewendet. Die Stäbe waren sehr rein, da eine qualitative Analyse 99 Proc. Zink ergab, während von den gewöhnlichen Verunreinigungen nur Blei mit 0,1 Proc. vorhanden war. Eisen, Arsen, Cadmium, Schwefel liessen sich nur in ganz geringen Mengen nachweisen. Die Dimensionen der Versuchsstäbe waren: Durchmesser 5 mm, Länge 330 mm, wobei die Länge, da die Stäbe mit den Messinghülsen fest verbunden waren, die freie, nicht die absolute Länge bezeichnet.

Die Stäbe wurden bei Beginn jeder Versuchsreihe in die beiden Fassungen eingespannt und in dem Erwärmungsapparat mittelst Conus und Schraube befestigt, worauf das Streckgewicht angehängt wurde, nachdem vorher die Torsion der spannenden Schnur durch Anhängen gleicher Gewichte an beiden Enden und Entdrillen möglichst beseitigt war. Darauf wurden die Schrauben eingestellt, welche zur Führung der Stahlspitzen dienten und die halbkreisförmige Scala so gerichtet, dass der Versuchsstab in ihrem Mittelpunkt sich befand, und ihre horizontale Lage durch Drehen des Spiegels geprüft, durch Höher- oder Tieferstellen der sie tragenden Böcke bewerkstelligt. Nachdem die Torsionsschnur mit dem Rahmen verbunden und der Erwärmungscylinder mit Oel gefüllt war, wurden die Schrauben abermals auf ihre richtige Stellung hin geprüft, und die untere so weit zurückgedreht, dass der Ausdehnung des Stabes bei dem Anwärmen freier Spielraum gelassen war. Das sich stark ausdehnende Oel wurde durch eine Pipette abgesaugt. Während des Anwärmens zeigte sich stets eine mit der Temperatur wachsende Torsion, welche in abnehmendem Verhältniss einem Maximum sich näherte, als die Temperatur ihren Höhepunkt erreicht hatte. Bei Beginn der Versuche war die Ruhelage des Stabes immer soweit erreicht, dass während 5 Minuten das Fadenkreuz um höchstens 1 mm der Scalentheilung sich verschob. Temperatur und Spiegelstellung wurden vom Beginn der Erwärmung an fortwährend beobachtet, letzterer wurde, sobald er in die oben erwähnte

Ruhelage gekommen war, wieder auf die Nulllage zurückgestellt. Nach G. Wiedemann¹⁾ ist eine permanente Deformation ein neuer Zustand der Ruhe, kein Uebergangsstadium, und demgemäss auf eine neue, dem jeweiligen Zustand des Körpers entsprechende stabile Gleichgewichtslage zurückzuführen.

Die Versuchsreihe selbst begann mit Auslösen der Arretierungsschnur, durch Drehen an der Kurbel. War der Spiegel zur Ruhe gekommen, so wurde das Wasserzuflussrohr möglichst vorsichtig im Stativ heruntergeschoben, bis in die Nähe des Bodens des Belastungsgefäßes, sodann erst sehr langsam, später, wenn mehr Wasser im Gefäß war, der Wasserzufluss schneller in Gang gesetzt. Eingeritzte Striche in dem Becherglas, deren Höhen vom Boden aus einem vorher gewogenen Wassergewicht entsprachen, dienten als Marken zu den Ablesungen, welche in den später angeführten Tabellen angegeben sind. Die Höhe des steigenden oder sinkenden Wassers war genau ablesbar, da die Striche im Wasser sich spiegelten, und an vier diametralen Stellen des Becherglases eingeritzt waren. War die Maximalbelastung erreicht, so wurde der Wasserablauf durch Herabsetzen des Zulaufgefäßes eingeleitet; ehe das letzte Wasser abfloss musste das Zuflussrohr dem Boden des Becherglases vorsichtig genähert werden, da infolge der Wirkung der Torsionsbelastung das Becherglas jetzt tiefer hing. War alles Wasser abgesaugt, so wurde das Zuflussrohr wieder im Stativ ohne Erschütterung zu verursachen gehoben, dann der Stab völlig entlastet durch Anziehen der Arretierungsschnur. Er erreichte seine neue Gleichgewichtslage natürlich erst allmäthlich, nach 20 Minuten war er derselben so nahe, dass der Spiegel innerhalb 5 Min. sich in den allermeisten Fällen um weniger als 1 mm Scalenthilung verschob; die constante Lage war hier ebenso annähernd erreicht wie am Anfang der Versuchsreihe. War dies der Fall, so wurde der tordirende Faden in entgegengesetzter Richtung um den Torsionskreis gelegt und in genau gleicher Weise die Detorsion des Stabes unmittelbar an die Torsion angeschlossen. Selbstverständlich wurde während der ganzen Zeit die Temperatur des Oelbades durch das in ihm befindliche Thermometer wiederholt ab-

1) G. Wiedemann, Wied. Ann. 6. p. 511.

Ann. d. Phys. u. Chem. N. F. 54.

gelesen, durch Auf- und Zuschrauben der Brenner möglichst constant erhalten, und so oft die übrigen Ablesungen es gestatteten, der Rührer in Bewegung gesetzt, sodass eine im ganzen Oelbad gleiche Temperatur für den in der Mitte befindlichen Versuchsstab angenommen werden konnte. Eine von der hier angewandten verschiedene Beobachtungsmethode würde erhalten werden, wenn, sobald die einzelnen Torsionsbelastungen — 250 g, 300 g etc. — erreicht sind, der Wasserzufluss unterbrochen würde, sodass der zeitliche Verlauf der Zunahme der temporären Torsion bis zu einem Maximum beobachtet werden könnte. Diese Art der Ablesung, welche für aufgelegte, aufsteigende Gewichte in der bereits mehrfach erwähnten Abhandlung von G. Wiedemann¹⁾ Anwendung findet, konnte leider bei der vorliegenden Untersuchung nicht weiter berücksichtigt werden, da ausser der erheblich verlängerten Versuchsdauer die starken Ausschläge bei höheren Temperaturen kaum eine genügend constante Ruhelage zugelassen haben würden. Ausserdem wäre der Spiegel schon bei niedrigeren Temperaturen über die Scala hinausgegangen, während es wünschenswerth erschien, möglichst viel Beobachtungsreihen von einem Stabe zu erhalten. Es ist zu erwarten, dass die Curven bei der angedeuteten Beobachtungsmethode Knicke zeigen werden, die zusammenfallen mit dem erneuten Wasserzufluss. Zur Auswechselung der Stäbe wurde nach Entfernung des Streckgewichtes und der beiden Schrauben unter den Stahlspitzen mittels Heber das heisse Oel aus dem Cylinder gesaugt, bei niedrigeren Temperaturen floss es, nach Entfernung des Stabes, durch den Conus des Cylinderbodens ab. Die auf diese Weise tordirten Stäbe, welche natürlich zu mehreren Versuchsreihen verwendet werden sollten, hatten nach der Beanspruchung noch eine bedeutende Drillung, welche für den folgenden Versuch möglichst entfernt werden musste. Zu diesem Zweck, zugleich aber auch um dauernde Aenderungen der Elasticität bei späterer, grösserer Erwärmung zu vermeiden, wurden die Stäbe durch einen Bunsenbrenner gezogen, während zugleich ein dem späteren Streckgewicht gleiches Gewicht dieselben belastete. Die Grösse dieses Gewichtes, wie die Dauer der

1) G. Wiedemann, Wied. Ann. I. c. p. 495.

Erwärmung im Bunsenbrenner ist verschieden bei gezogenen und gegossenen Stäben, erstere wurden, wie theilweise bereits erwähnt, durch 14100 g gestreckt und 2 Min. erwärmt, letztere, die sich auch schon beim Einschrauben in die Messinghülsen sehr zerbrechlich zeigten, übrigens auch weniger Torsionsrückstand hatten, vertrugen nur eine Erwärmung von 0,5 Min. bei 5600 g Belastung. Besondere Aufmerksamkeit wurde auch den Dimensionen der Stäbe gewidmet, sie wurden vor, wie nach jeder Versuchsreihe, dann auch noch nach der Erwärmung im Bunsenbrenner gemessen.

Zu diesen Ausführungen ist noch Folgendes zu bemerken: Während die ersten Stäbe direct in die Fassungen eingespannt wurden, ermöglichten die Messinghülsen an den Enden eine gleichmässigere Vertheilung der Torsion über den Versuchsstab, zugleich auch ein leichteres Erkennen der durchaus zu vermeidenden Biegung, wenn die erste Laufrolle, die Axe des Versuchsstabes und der Conus des Kupfercylinders nicht in eine Linie fielen.

Auf die Torsion der einzelnen Stäbe folgte in allen Versuchsreihen die Detorsion, da es wünschenswerth erschien, nicht nur eine Versuchsreihe bei jeder Temperatur zu haben, ausserdem ist der Stab bei der folgenden Versuchsreihe infolge der Detorsion weniger deformirt, da seine Theilchen durch abwechselnd wirkende Kräfte entgegengesetzte Ablenkungen erfahren. Trotz dieser Vorbereitung war auf die Genauigkeit der Beobachtungen von besonders störendem Einfluss die Torsion der Stäbe, welche beim Anwärmen, wo noch keine Torsionsbelastung vorhanden war, auftrat, und welche mit höherer Temperatur bedeutend zunahm. Dieselbe, welche auch von Rehkuh¹⁾ beobachtet wurde, rührte zum Theil her von der Drillung der spannenden Schnur, wofür besonders die Thatsache spricht, dass ein Stab, bei dessen Anwärmen die constante Ruhelage in der angegebenen Annäherung bei 225° nicht erreichbar war, bedeutend kleinere Ausschläge zeigte, als die streckende Schnur ausgebückt war, die Ausschläge wuchsen sofort, als ohne irgend eine weitere Aenderung das Streckgewicht wieder wirkte, und liessen abermals bei Wieder-

1) Rehkuh, Diss. Jena 1888.

aushacken der Spannschnur nach. Die Länge der streckenden Schnur, welche hierbei in Betracht kommt, beträgt 1250 mm, ihr Durchmesser 4 mm. Die Zunahme des Ausschlages mit der Temperatur folgt aus der Abnahme der Molecularkräfte, sodass die Theilchen äusseren Kräften, die auf sie einwirken, leichter nachgeben. Ein zweiter, nicht minder wichtiger Grund der Nichtconstanz der Stäbe bei constant gehaltener Temperatur ist der Torsionsrückstand der früheren Versuchsreihen, der zwar möglichst verringert wurde, gänzlich indess nicht zu entfernen war. An Stelle der vorhin erwähnten Erwärmung im Bunsenbrenner suchte ich die Stäbe zunächst nach jeder Versuchsreihe im Oelbad bei einer Temperatur von 160 bis 280° zu erhitzen, wodurch eine Abnahme der permanenten Torsion auftritt¹⁾, dann erhöhte ich, als noch immer eine beträchtliche Drillung in den Stäben war, die Temperatur des Bades, um die Moleküle noch leichter beweglich zu machen, indem die in Glasröhren eingeschmolzenen Stäbe in einem Bleibade erhitzt wurden. Besser als hierdurch wurde der Zweck: Die Theilchen ihrer Gleichgewichtslage möglichst zu nähern, erreicht durch Erwärmung bei gleichzeitiger Belastung, doch genügte diese ausserordentliche Beanspruchung, welche sogar Dimensionsänderungen zur Folge hatte, nicht, eine Torsion beim Anwärmen möglichst vollständig zu vermeiden. Beide Einflüsse: Drillung der spannenden Schnur und Rest der vorhergegangenen Deformation wirkten oft nebeneinander, wodurch eine Umkehr der Spiegeldrehung beim Anwärmen, die bei einigen Stäben auftrat, durch den überwiegenden Einfluss erklärlich ist.

Den bedeutenden Einfluss der Erschütterungen, welche bei sämmtlichen ähnlichen Beobachtungen nach Möglichkeit vermieden sind, fasst G. Wiedemann²⁾ in folgenden Satz zusammen. Wird ein Draht erschüttert, während er unter dem Einfluss der tordirenden Gewichte steht, so nimmt die temporäre Torsion zu; wird er erschüttert nachdem das drehende Gewicht entfernt ist, so nimmt seine permanente Torsion ab. Hat man aber einen Stab tordirt und durch entgegengesetzte Gewichte

1) Wiedemann, Pogg. Ann. **106**. p. 103.

2) Wiedemann, Pogg. Ann. **106**. p. 193; Wied. Ann. **6**. p. 506.

detordirt, so erhält er beim Erschüttern von neuem Torsion im früheren Sinn.“

Correctionen.

Von wesentlichem Einfluss auf die Grösse der Spiegel-ausschläge ist natürlich die Geschwindigkeit des Wasserzu- oder Abflusses, die möglichst in gleicher Grösse gehalten wurde. Geringere Geschwindigkeit bedingt stärkere Ausschläge, doch zeigen die Tabellen, dass dieser Einfluss sich nicht auf das Anwachsen der Ausschläge mit steigender Temperatur bezieht, sondern die grössere oder geringere Verschiedenheit zwischen Torsion und Detorsion bei derselben Temperatur verursacht. Zur Beurtheilung der Zu- oder Abflussgeschwindigkeit des Wassers, wie dessen Einfluss auf die Spiegelausschläge, sind in den angeführten Tabellen die Zeiten nach halben Minuten abgerundet mit angegeben, nach welchen die dabei stehenden Belastungen den Stab drillten. Diese Angaben charakterisiren die Verhältnisse besser, als corrigirte Tabellenwerthe. Da diese Correctionen zunehmen mit wachsender Temperatur, zugleich sich auch ändern bei den verschiedenen Stäben je nach ihrer Individualität, macht die Complicirtheit der Correctionen diese zu unsicher, um besonderes Gewicht darauf zu legen.

Eine weitere Correction der Tabellenwerthe ergiebt sich, wenn die angegebenen Werthe auf genaue quantitative Messungen Anspruch machen wollten, weiterhin aus dem Umstande, dass, wie Fig. 5 zeigt, der Spiegel sich nicht genau in der Drehaxe, befindet. Hier handelt es sich aber überhaupt nur um Vergleichswerthe, andererseits sind die Correctionen ziemlich unwesentlich, da der Maximalfehler 24 mm beträgt, bei der gewöhnlichen Grösse der Ausschläge sich nur auf 10,5 mm beläuft.

Die Ausdehnung des Versuchsstabes ist bei höheren Temperaturen nicht zu vernachlässigen. Infolge der Beziehung

$$l_1 : l_2 = 1 + \alpha t_1 : 1 + \alpha t_2$$

worin l_1 und l_2 die Stablängen bei den Temperaturen t_1 und t_2 bedeuten, α der lineare Ausdehnungskoeffizient ist, ergiebt sich bei Einsetzung der betreffenden Werthe¹⁾ wenn

$$l_{18} = 330 \text{ mm} \quad l_{225} = 332,29 \text{ mm},$$

1) Des Ingenieurs Taschenbuch der Hütte. 15. Aufl. p. 284.

worauf beim Anwärmen des Stabes Rücksicht genommen wurde. Ausser dieser temporären Längenänderung ist noch in Betracht zu ziehen die permanente, die durch das starke Streckgewicht bei den gezogenen Stäben verursacht, bereits erwähnt wurde. Sie beträgt durchschnittlich 7 mm und fällt bei den gegossenen Stäben fast ganz fort. Temporäre und permanente Verlängerung zusammen betragen 9,3 mm im Maximum, der Drehwinkel φ würde unter Berücksichtigung der grösseren Länge und des veränderten Radius, welcher seiner Wichtigkeit wegen an 12 verschiedenen Stellen jedesmal gemessen wurde, im Maximum wachsen von $\varphi = 0,515^\circ$ auf $\varphi = 0,574^\circ$, welcher Betrag jedenfalls klein genug ist, um für den hier vorliegenden Zweck ausser Acht zu bleiben. Die Correctionen infolge der Spiegelstellung neben der Drehaxe und infolge der Stabverlängerung heben sich zum Theil auf, da erstere die Tabellenwerthe verkleinern, letztere sie zu gross erscheinen lassen. Auch hieraus rechtfertigt sich eine Vernachlässigung dieser Correctionen überhaupt.

Tabellen.

Die Beobachtungsreihen sind in den folgenden Tabellen verzeichnet, in welchen die Mitte der Scala — eigentlich 500,0 mm der Scalentheilung — als Nullpunkt angenommen ist, damit die Werthe, welche bei der Torsion erhalten wurden, direct mit denen der Detorsion vergleichbar sind. Die ganzen Zahlen sind Millimeter der Scalentheilung, die Decimalen geschätzte Bruchtheile eines Millimeters. Die Tabellenwerthe, sind als ein Auszug aus den Beobachtungsreihen anzusehen, sie sind auf ihre Richtigkeit hin leicht controlirbar durch die Ablesungen der Spiegelstellung, welche alle Minuten gemacht wurden. Bei grösseren Ausschlägen, bei denen infolge der schnellen Drehung des Spiegels die Theilstriche der Scala nur unsicher abzulesen waren, ist den betreffenden Tabellenwerthen ein (u) angehängt. In der zweiten und vierten Column ist die Zeit angegeben, in welcher die daneben verzeichneten Belastungen der Versuchsstäbe erreicht waren. Von den Stäben selbst sind nur einige als Beispiele angeführt.

Stab Nr. 7 gezogen, langsam gekühlt.

17°

50°

	Torsion	nach Min.	Detorsion	nach Min.		Torsion	nach Min.	Detorsion	nach Min.
Bei Bel.	9,5	0	10,0	0	Bei Bel.	10,0	0	10,5	0
200 g	20,0	4	18,5	4,5	200	23,2	5	25,0	4
250	25,0	5,5	22,2	6	250	26,0	7	32,0	5,5
300	30,0	7,5	29,8	7,5	300	34,8	9	40,2	7,5
400	41,5	10,5	43,8	11,5	400	54,5	11,5	56,8	10,5
500	54,0	14,5	55,2	15	500	75,0	15,5	75,5	14,5
400	47,0	18	47,8	19	400	72,8	21,5	71,8	19,5
300	39,5	22	39,8	23	300	65,0	28	62,5	25
250	35,0	24	34,5	25,5	250	60,2	30,5	58,2	28
200	31,2	27	30,8	27,5	200	56,2	33	53,2	32
Bei Entl. {	14,0	30	11,5	30	Bei Entl. {	35,0	37	32,0	37
nach 20' {	12,0	50	8,5	50	nach 20' {	28,2	57	27,2	57

100°

125°

Bei Bel.	12,0(u)	0	12,5(u)	0	Bei Bel.	14,0(u)	0	13,5(u)	0
200 g	35,0	3,5	32,8	5	200 g	43,0	4,5	45,0	5
250	43,8	4,5	51,4	7	250	61,2	6,5	59,0	6,5
300	58,2	7	70,0	9	300	82,2	9	78,8	7,5
400	93,5	10,5	99,8	12	400	133,8	13,5	123,5	10,5
500	135,5	14	141,0	14,5	500	197,8	17,5	178,0	13
400	141,2	19	144,0	18	400	211,8	22	183,5	16
300	137,0	24	135,0	21,5	300	201,2	25	175,2	18,5
250	132,0	27	129,5	23	250	196,0	27,5	169,0	20
200	126,2	30	123,0	25	200	189,5	30,5	163,0	21,5
Bei Entl. {	102,0(u)	37	97,0	27	Bei Entl. {	159,0(u)	34	132,0(u)	24
nach 20' {	90,8	57	86,5	47	nach 20' {	141,0	54	118,5	44

150°

175°

Bei Bel.	16,0(u)	0	16,0(u)	0	Bei Bel.	16,0(u)	0	16,0(u)	0
200 g	78,0	5	56,5	6	200 g	70,5	4,5	63,0	4,5
250	100,0	7,5	81,5	8,5	250	99,0	6	92,0	6
300	127,0	9	105,0	10,5	300	137,2	8,5	131,0	7,5
400	187,0	11	172,5	14	400	232,0	10,5	223,5	10,5
500	281,0	13,5	266,0	18	500	373,0	14	365,0	13,5
400	318,5	17,5	294,0	23	400	445,5	18	507,5	20,5
300	320,8	20,5	290,5	26,5	300	455,0	22	521,0	24,5
250	318,5	24,5	284,5	29,5	250	454,2	24	521,0	26,5
200	313,5	27,5	278,0	31,5	200	450,8	26	517,8	29,5
Bei Entl. {	286,0	36	245,0(u)	36	Bei Entl. {	418,0(u)	30	490,0	35
nach 20' {	264,2	56	225,2	56	nach 20' {	388,5	50	461,5	55

200°

	Torsion	nach Min.	Detorsion	nach Min.
Bei Bel.	18,0 (u)	0	20,0 (u)	0
200	83,0	4	81,0	3,5
250	124,0	5,5	118,0	5
300	177,8	7	172,0	6,5
400	341,5	10	317,5	8,5
500	590,0	13	540,0	11,5
400	750,0	16,5	713,0	15,5
300	785,0	20,5	760,0	19,5
250	787,0	22,5	769,2	22
200	785,0	24	770,2	24,5
Bei Entl.	757,5 (u)	29	739,0 (u)	29
nach 20'	718,5	49	698,8	49

Stab Nr. 14 gegossen, langsam gekühlt.

150°

175°

	Torsion	nach Min.	Detorsion	nach Min.		Torsion	nach Min.	Detorsion	nach Min.
Bei Bel.	10,0	0	9,5	0	Bei Bel.	10,0	0	10,0	0
200 g	29,0	4	21,0	5	200 g	32,0	5	23,5	5
250	37,5	5,5	28,0	6,5	250	41,5	6,5	31,0	6,5
300	46,5	7	36,0	8,5	300	52,0	8	39,8	7,5
400	69,0	9,5	52,0	11,5	400	80,0	12	60,0	10
500	95,0	13	72,0	15	500	89,0	15	83,0	13
400	94,0	19,5	67,5	21	400	170,0	20	80,0	17,5
300	85,5	25	59,0	27	300	215,5	25	72,0	21,5
250	81,2	27,5	54,8	29	250	214,5	28	67,5	24
200	77,0	30	50,0	32	200	211,2	31	63,0	26,5
Bei Entl.	57,0	34	30,0	36	Bei Entl.	189,5	34	43,0	31
nach 20'	49,8	54	26,8	56	nach 20'	184,2	54	39,5	51

200°

225°

	Torsion	nach Min.	Detorsion	nach Min.		Torsion	nach Min.	Detorsion	nach Min.
Bei Bel.	11,0	0	11,0	0	Bei Bel.	11,5	0	12,0	0
200 g	32,0	5	26,5	3,5	200 g	31,0	4,5	28,2	4,5
250	44,5	6,5	34,2	4,5	250	40,5	6	37,0	6
300	57,0	8	43,5	5,5	300	51,8	7,5	48,0	8
400	92,0	11,5	65,0	8	400	80,0	11	75,0	11,5
500	136,8	15	107,0	10,5	500	128,0	14,5	130,5	15,5
400	171,8	22	146,5	14	400	143,5	19	155,0	21
300	172,5	27,5	152,8	17	300	139,0	22,5	154,5	26
250	168,0	30	150,5	18,5	250	184,5	25	151,0	28,5
200	163,0	33	147,0	20	200	129,5	27	145,5	31,5
Bei Entl.	141,5	36	126,0	23	Bei Entl.	106,5	31	123,5	36
nach 20'	135,4	56	121,0	43	nach 20'	98,0	51	116,5	56

Stab Nr. 17 gezogen, rasch gekühlt.

125°

	Torsion	nach Min.	Detorsion	nach Min.
Bei Bel.	13,0(u)	0	12,5	0
200 g	41,0	4	38,2	3,5
250	55,2	5,5	45,0	4,5
300	70,5	6,5	57,2	6
400	105,0	9	85,0	8,5
500	142,0	12	120,0	10,5
400	147,5	16,5	122,8	15
300	139,2	20,5	114,0	19,5
250	133,8	23	109,2	22
200	128,0	25	103,5	24,5
Bei Entl. {	101,0	29	78,2	29
nach 20' {	89,2	49	68,0	49

150°

175°

Detorsion nach Min.		Torsion	nach Min.	Detorsion	nach Min.		Torsion	nach Min.	Detorsion	nach Min.
Bei Bel.	12,5	0	13,0	0		Bei Bel.	15,0	0	14,0	0
200 g	38,5	3,5	38,0	3,5		200 g	50,0	3,5	45,8	4
250	51,8	5	51,5	4,5		250	69,0	5	65,0	5,5
300	70,5	6,5	67,5	6		300	90,0	6,5	87,0	7
400	108,0	9	107,0	8,5		400	147,5	8,5	143,0	9,5
500	164,0	12	157,5	11,5		500	225,0	11,5	225,0	13
400	182,2	16,5	165,8	15		400	266,8	16	264,5	18
300	177,5	21,5	158,5	19,5		300	265,8	20	261,2	22,5
250	172,5	23,5	153,2	21,5		250	262,5	22	257,0	25
200	165,8	26	147,2	24		200	256,8	24,5	250,8	28
Bei Entl. {	139,0	30	120,0	27		Bei Entl. {	228,0	29	222,0	32
nach 20' {	123,8	50	110,5	47		nach 20' {	209,5	49	204,0	52

200°

225°

12,0	0	Bei Bel.	15,0(u)	0	15,0(u)	0	Bei Bel.	17,0(u)	0	18,0(u)	0
28,2	4,5	200 g	55,0	4,5	49,0	3,5	200 g	83,0	3,5	75,0	4
37,0	6	250	75,0	5,5	69,0	5	250	123,5	5	117,0	5,5
48,0	8	300	102,0	6,5	92,0	6	300	193,0	6,5	173,0	7,5
75,0	11,5	400	182,5	9,5	166,0	8,5	400	352,5	10	324,0	11
130,5	13,5	500	303,0	12,5	270,0	11	500	590,0	13,5	600,0	15,5
155,0	21	400	382,5	17,5	322,5	14,5	400	736,0	17	717,0	19
154,5	26	300	395,0	22	322,0	18	300	771,0	21	741,2	23
151,0	28,5	250	397,2	25,5	313,0	19,5	250	775,2	23	737,0	24,5
145,5	31,5	200	394,0(u)	29,5	310,0	21,5	200	773,0	24,5	732,0	26
123,5	36	Bei Entl. {	364,0	35	275,0(u)	26	Bei Entl. {	740,0	27	690,0	29
116,5	56	nach 20' {	340,0	55	245,0	46	nach 20' {	698,8	47	635,8	49

Stab Nr. 19 gegossen, rasch gekühlt.

125°

	Torsion	nach Min.	Detorsion	nach Min.
Bei Bel.	9,5	0	9,8	0
200 g	19,0	4	19,0	4
250	25,8	5,5	25,8	5,5
300	32,0	6,5	32,2	6,5
400	46,5	8,5	48,5	10
500	66,0	11,5	68,8	13
400	63,2	15,5	67,0	16,5
300	56,2	18,5	57,8	19,5
250	52,5	20	54,0	21
200	48,0	21,5	49,0	22,5
Bei Entl.	29,5	24	30,0	25
nach 20'	26,0	44	28,0	45

150°

175°

	Torsion	nach Min.	Detorsion	nach Min.		Torsion	nach Min.	Detorsion	nach Min.
Bei Bel.	8,8	0	9,2	0	Bei Bel.	8,8	0	8,8	0
200 g	19,8	4,5	18,8	4	200 g	22,2	4	22,0	4
250	25,8	5,5	25,2	5,5	250	30,8	5,5	33,0	5,5
300	33,0	7	32,0	7	300	37,4	6,5	47,0	7
400	48,5	10	46,2	9,5	400	54,0	10	84,0	10
500	67,0	12,5	63,2	12,5	500	75,5	13	339,8	13
400	65,0	16,5	59,2	16	400	89,0	17	375,2	17
300	57,5	20,5	51,0	19,5	300	96,2	20,5	416,2	20,5
250	54,0	22	47,2	21,5	250	94,8	22,5	465,0	22
200	49,5	23,5	43,0	23	200	93,0	24	465,8	24
Bei Entl.	32,0	28	24,8	26	Bei Entl.	74,2	27	465,5	27
nach 20'	27,5	48	21,8	46	nach 20'	68,7	47	451,0	47

200°

	Torsion	nach Min.	Detorsion	nach Min.
Bei Bel.	10,5	0	10,0	0
200 g	27,5	4	24,2	4
250	39,5	5,5	82,0	5
300	54,5	7	41,8	6,5
400	110,0	10,5	68,8	9,5
500	869,0	14,5	121,0	12,5
400	1072,0	19		
300	1094,5	23,5		
250	1094,5	26		
200	1093,2	28		
Bei Entl.	1072,5	32		
nach 20'	1066,5	52		

Spiegel über die
Scala hinaus.

Gezogene Stäbe, langsam gekühlt.

Zur leichteren Uebersicht der durch die Tabellen gefundenen Verhältnisse sind erstere graphisch dargestellt durch Curven, deren Abscissen die Belastung und deren Ordinaten die zugehörigen Ausschläge darstellen.

Um das Verhalten der Versuchsstäbe nach völliger Entlastung bei den Curven noch mit zur Anschauung zu bringen, habe ich, da diese Nachwirkung nicht unwesentlich ist, noch eine Abscisse angegeben, welche einer Zeit von 20 Minuten entspricht, und zu welcher die in der letzten Zeile der Tabellen angegebenen Ausschläge als Ordinaten gehören. Da auf der x -Axe im übrigen nur die Belastungen aufgetragen sind, können die erhaltenen Endpunkte der Curven auf eine den übrigen Punkten entsprechende Genauigkeit nicht Anspruch machen, doch zeigt der Parallelismus aller Curventheile, welche diese Nachwirkungsperiode darstellen, deutlich, dass der begangene Fehler bei dem angewendeten Maassstab der Zeichnung nicht wahrnehmbar ist.

Somit entspricht Fig. 8 der ersten der angegebenen Tabellen, durch welche das Verhalten eines gezogenen, langsam gekühlten Stabes angedeutet ist. Hierbei zeigt sich in der Nähe von 150° keine Absonderlichkeit, welche doch zu erwarten ist, wenn das vorliegende Material bei 100° weich, bei 200° wieder spröde ist¹⁾, es fällt im Gegentheil die Regelmässigkeit der zunehmenden Ausschläge bei steigender Temperatur sofort auf.

Dass nach völliger Entlastung die Nulllage nicht wieder erreicht wird, verursacht die permanente Torsion, die, wie Wiedemann zeigt²⁾, schon bei öfterer Wiederholung der gleichen temporären Torsion wächst, anderseits aber auch mit der Temperatur, mit welcher die temporären Torsionen bedeutend wachsen, zunimmt. Der Unterschied zwischen Torsion und Detorsion nimmt im allgemeinen mit steigender Temperatur zu. Der grösste Unterschied zeigt sich immer bei oder über 125° , doch ist, da er bei verschiedenen Stäben bei ganz verschiedenen Temperaturen auftritt, ein weitergehender Schluss nicht möglich.

1) Graham-Otto, Lehrb. d. anorg. Chemie. 5. Aufl. Abth. 3. p. 767.

2) Wiedemann, Wied. Ann. 6. p. 495.

Detorsion	nach Min.
8,8	0
22,0	4
33,0	5,5
47,0	7
84,0	10
139,8	13
375,2	17
116,2	20,5
465,0	22
165,8	24
165,5	27
151,0	47

War bei höherer Temperatur der Spiegel einmal infolge starker Torsionsbelastung über die Scala hinausgegangen, so war der Stab für weitere Messungen unbrauchbar, da der Spiegel in gleicher Weise bei allen folgenden Versuchen schneller die Scala passirte, bis der Bügel der oberen Fassung an die Wandstreben stiess. Diesem Stande entspricht eine Torsion um $\sim 90^\circ$, und da nach Rehkuh bei 60° die Deformation des Zinks¹⁾ bereits eine Grösse erreicht, die der früher als Elasticitätsgrenze bezeichneten zulässigen Beanspruchung entspricht, so ist diese bereits überschritten, und der anstossende Bügel nur Veranlassung, dass der Stab sich nicht weiter drehen kann; er ist jedenfalls so stark tordirt, dass die verringerte Cohäsion dauernd deutliche, starke Deformationen zeigt. Die Verschiedenheit der einzelnen Stäbe, ihre Individualität, tritt hier recht deutlich hervor, von den ersten drei Stäben zeigt Nr. 1 bei denselben Belastungen bedeutend grössere Ausschläge als Nr. 3, Nr. 2 steht in der Mitte. Mag auch hier die ungenügende Einspannung ohne Messinghülse schuld daran gewesen sein, dass die Torsion sich nicht gleichmässig über den ganzen Stab vertheilte, so zeigt sich doch kein Unterschied zwischen dem Verlauf der Versuchsreihen dieser drei ersten Stäbe und dem von Nr. 6 und 7. Dass die Vertheilung der Torsion nach der Annahme von Kohlrausch²⁾ sich wirklich über den ganzen Stab gleichmässig vertheilt, schliesse ich aus dem Umstände, dass Stäbe mit deutlich sichtbaren Rissen kein abnormes Verhalten zeigen; bei ungleichmässiger Vertheilung der Torsion müsste an den gerissenen Stellen ein leichteres Zerwürgen des Stabes, also ein grösserer Ausschlag auftreten.

Gegossene Stäbe, langsam gekühlt.

Die untersuchten gegossenen Stäbe wurden bis auf die bereits angegebenen Aenderungen ebenso behandelt wie die gezogenen. Bei diesen Stäben war es trotz der kürzeren Erwärmung leichter, die Ruhelage bei constanter Temperatur

1) Rehkuh, Die elastische Nachwirkung von Zink etc. Diss. Jena 1888.

2) F. Kohlrausch, Ueber die elastische Nachwirkung bei der Torsion. Diss. Göttingen 1863.

zu erhalten, auch nahm hier der Ausschlag mit abnehmender Torsionsbelastung fast momentan ab, wogegen die gezogenen Stäbe eine oft recht bedeutende Nachwirkung zeigten. Mit diesem Verhalten, welches erklärlich ist durch die später noch näher besprochene grössere Krystallisation der gegossenen Stäbe im Verhältniss zum gewalzten Material, steht im Widerspruch ein Theil der gezeichneten Curven. Bei genügend grossem Maassstab der Zeichnung aber würden die Curven für gegossene Stäbe bei niederen Temperaturen einen Knick zeigen, die der gezogenen nicht, bei höheren Temperaturen zeigen einige gegossene Stäbe zwar ebenso starke Nachwirkung wie die gezogenen, es ist aber auch hier bei der Durchschnittsbetrachtung die stärkere Nachwirkung bei den gezogenen Stäben unverkennbar. Die Notiz von Rehkuh, nach welcher die Nachwirkung bei Zink wegen des geringen Elasticitätscoefficienten besonders gross ist, zeigt sich stärker bei gezogenem, als bei gegossenem Material.

Bei diesen gegossenen Stäben unterbricht, wenn auch nicht so bedeutend wie bei den gegossenen, rasch gekühlten Versuchsstäben ein plötzliches Anwachsen des Ausschlages die gleichmässige Zunahme desselben mit der Temperatur, und zwar zeigt sich diese Unregelmässigkeit immer oberhalb 125° , weshalb in den letzten Tabellen und in den Fig. 10—13 die den niedrigeren Temperaturen entsprechenden ganz regelmässigen Curven weggelassen sind. Die Detorsion zeigt hier einen gleichmässigeren Verlauf, und die Individualität der Stäbe tritt erst bei höheren Temperaturen und stärkerer Torsionsbelastung hervor, die Abweichung der Ausschläge ist auch nicht so bedeutend wie bei gezogenen Stäben. Um zu erkennen, ob die bei öfters beanspruchtem Material auftretenden Ermüdungserscheinungen, die nach Egleston¹⁾ darin bestehen, dass Kohlenstoff aus blosser physikalischer Vereinigung in chemische Verbindung mit dem Metall geht, vielleicht für sich den stärkeren Ausschlag des Spiegels bei höheren Temperaturen verursachen, wurde Nr. 13 bei dem ersten Versuch gleich während einer Temperatur von 225° untersucht, bei 500 g Torsionsbelastung ging der Spiegel über die Scala

1) Egleston, The fatigue of metals. Engineer 40. p. 31.

hinaus, der folgende Stab Nr. 14 zeigt indess, dass auch ohne vorhergegangene Beanspruchung die Ausschläge mit der Temperatur mehr und mehr wachsen, wenn der Gang der Zunahme auch regelmässiger erscheint als bei den öfters beanspruchten Stäben.

Die bei dem Material sicher nicht ausbleibende Verringerung seiner Cohäsion scheint sich eher dadurch geltend zu machen, dass nach dem Anwärmen die constante Ruhelage des Spiegels schwer, oder wie Nr. 7 zeigt, trotz vieler Mühe gar nicht zu erreichen war. Dass die Zunahme der permanenten Torsion bei wachsender Temperatur stets eine grössere ist als die der temporären Torsion, zeigen die gegossenen Stäbe in gleicher Weise als die gezogenen. Die Grösse des Unterschiedes ist hier wie bei jenen verschieden je nach der Individualität des Stabes, doch entspricht dieses Verhalten der temporären Torsion zu dem der permanenten den Bemerkungen von Wiedemann¹⁾, welche derselbe bei seinen Versuchen über die verschiedenen Arten der Elasticität ausführt, wenn auch ohne Berücksichtigung des Einflusses der zunehmenden Temperatur.

Gezogene Stäbe, rasch gekühlt,

von deren Verhalten Fig. 12 ein Bild gibt, zeigen einen mit zunehmender Temperatur stetig wachsenden Ausschlag des Spiegels, der auf eine Structuränderung, ein Spröderwerden um so weniger hindeutet als die Ausschläge bei höheren Temperaturen sehr grosse Werthe annehmen. Vergleicht man die Ergebnisse dieser Stäbe mit denen der früher gezogenen, so zeigt sich kein besonderer Unterschied zwischen gehärteten und nicht gehärteten Stäben, da die gehärteten Stäbe in ihrem Verhalten zwischen den nicht gehärteten stehen. Auch die übrigen, früher discutirten Erscheinungen: elastische Nachwirkung, Verhältniss der temporären zur permanenten Torsion, zeigen bei den gehärteten Stäben kein bemerkenswerth verschiedenes Verhalten von dem der nicht gehärteten.

2) Wiedemann, Pogg. Ann. 107. und Wied. Ann. 6.

Gegossene Stäbe, rasch gekühlt.

Die zuletzt untersuchten Stäbe sind wieder gegossene Stäbe, die nach der Erwärmung im Bunsenbrenner rasch gekühlt wurden. Im allgemeinen zeigen auch diese Stäbe einen mit der Temperatur bis 125° regelmässig wachsenden Ausschlag. Die Versuchsserien bei 150° zeigen analog denen der übrigen gegossenen Stäbe wenig verschiedene Ausschläge von denen bei 125° , oberhalb 150° werden die Ausschläge wohl grösser, zeigen indess, wie die früher untersuchten gegossenen Stäbe andeuteten, einige Unregelmässigkeiten. Eine plötzlich auftretende, dann aber ebenso wieder verschwindende Zunahme des Ausschlages deutet hin auf eintretende Sprödigkeit; und Hand in Hand mit dieser Erscheinung geht der bei einigen Stäben beobachtete Umstand, dass, wenn der Spiegel bei genügender Torsion über die Scala hinausgeht, er plötzlich still steht, noch ehe der Bügel der oberen Fassung an die Wandstreben stiess, und während die Arretirungsschnur noch ganz ungespannt war. Stets fielen diese Absonderlichkeiten mitten in den zu- oder abnehmenden Wasserfluss, und traten nur während 2 oder 3 Min. auf, dann ging der Spiegel seinen gleichmässigen Gang weiter. Aus dem Umstände, dass von den zuletzt untersuchten Stäben nur einige, und auch diese nur theilweise die erwähnten Unregelmässigkeiten zeigen, kann man kein von den früher untersuchten Stäben wesentlich abweichendes Verhalten constatiren, die den gegossenen Stäben überhaupt eigene, und durch das dem Zinnschrei¹⁾ gleiche Geräusch leicht zu beobachtende starke Krystallisation des Gefüges tritt in höheren Temperaturen durch die erörterten Unregelmässigkeiten sichtbar auf.

Man bezeichnet als spröde²⁾ die Körper, welche bei äusseren Einwirkungen, die ein gewisses Maass überschreiten, den Zusammenhang der Theilchen durch ein plötzliches Ereigniss aufgeben. Dies thun die gegossenen Stäbe sämmtlich allerdings in hohem Maasse bei gewöhnlicher Temperatur, freilich nur bei der vorbereitenden Behandlungsweise, wo ihre leichte Zerbrechlichkeit unangenehm störte, sodass eine durch-

1) Douglas, Beibl. 5. p. 634.

2) Auerbach, Wied. Ann. 45. p. 277.

gehende Versuchsreihe für alle Temperaturen unmöglich war. Auch hier ist ein hervortretender Einfluss der verschiedenen Abkühlung durch anders verlaufende Nachwirkung nicht zu constatiren, da ihr stärkeres Auftreten bei höherer Temperatur und grösseren Ausschlägen durch letztere erklärlich ist. Temporäre und permanente Torsion unterscheiden sich gleichfalls nur in der besprochenen Weise.

Discussion der Literatur.

Es erübrigt sich noch, die gefundenen Resultate in Einklang zu bringen mit den eingangs angeführten Angaben anderer Untersuchungen.

Die von Kalischer erörterte Erscheinung, dass gewalztes Zink bei 150° eine Reihe von Veränderungen erleidet, kann durch die vorliegende Untersuchung nicht bestätigt werden, da die angegebenen Curven für Ausschläge während einer Temperatur über 150° sich von denen bei niederer Temperatur keineswegs auffällig unterscheiden. Es ist vielmehr gemäss den vorliegenden Beobachtungen dafür zu halten, dass, wie Heinemann annimmt, Zink ebenso wie Eisen gleich nach der Herstellung krystallinisch wird.¹⁾ Sind diese Verhältnisse augenscheinlich bei den gegossenen Stäben, so hindert die durch das Ziehen gebildete, härtere, weniger dehnbare Kruste,²⁾ überhaupt die grössere Verdichtung des Materials ein deutliches Auftreten der Krystallisation. Dass diese aber vorhanden ist, kann man beim Biegen durch den Zinkschrei deutlich wahrnehmen. Die allgemeine Ansicht, welcher auch Kalischer Erwähnung thut, wonach man die Metalle in gewalzter Form ebenso wie Drähte für unkrystallinisch hält, fällt in Bezug auf Zink als unbegründet. Auch die Eigenschaft gegossener Stäbe, die unkrystallinisch sind, und erst in Rothgluth krystallinische Structur annehmen³⁾, habe ich nicht finden können, da meine Gussstäbe sämmtlich sowohl dem Bruch, als der deutlich hörbaren Reibung der Krystallflächen aneinander nach nur krystallinische Structur zeigten.

1) Graham-Otto, Lehrb. der anorg. Chemie. 2. Th. 3. p. 11.

2) Karmarsch, Handb. der mechan. Technologie. 5. Aufl. 1. p. 197.

3) Kalischer, Verhandl. der phys. Ges. Berlin 1882. p. 6.

An diese Eigenschaft knüpft Heinemann in der erwähnten Abhandlung die Muthmaassung, dass das vorliegende Metall schon bei hoher Temperatur fest wird, dass die Moleküle aber durch die Starrheit der Masse gehindert sind, einander so nahe zu kommen, als ihrem Gleichgewicht bei gewöhnlicher Temperatur entspricht. Diese Spannung geht mit der Zeit, schneller durch Erschütterungen in den Gleichgewichtszustand über, woraus die übrigens auch bei Eisen vorhandene durch Axenbrüche auftretende Sprödigkeit sich herleitet. In Bezug hierauf scheint es mir, dass nur bedeutend über den Schmelzpunkt erhitztes Zink spröder sein kann. In wie weit meine Versuche diesen Schluss bestätigen, ist angegeben bei Beurtheilung der Bolley'schen Abhandlung.

Bolley hebt in einer älteren Arbeit gegenüber der gebräuchlichen Annahme, dass Zink nur zwischen 100° und 150° biegsam und streckbar sei, unter und über diesem Temperaturintervall aber spröde, hervor, dass die Temperatur, welcher das Metall beim Giessen ausgesetzt war, einen wesentlichen Einfluss auf die Eigenschaften des Zinks hat. Er fand, dass nahe dem Schmelzpunkt ausgegossenes Zink sich gut walzen liess, nahe der Glühhitze ausgegossenes äusserst spröde sei. Das mir zur Verfügung stehende gewalzte Material war durch das Ziehen zu den Versuchsstäben ausgezogen, direct aus den zerschnittenen Gussblöcken, welche aus der Zinkhütte kamen. Wie hoch die Schmelztemperatur des Metalls gewesen ist, war darum nicht festzustellen, doch kann man, da auch von anderer Seite¹⁾ die Weichheit und Dehnbarkeit des Zinks hervorgehoben wird, wenn man dem flüssigen Metall vor dem Ausgüssen noch etwas festes zufügt, wohl annehmen, dass die Schmelztemperatur beim Guss nicht besonders hoch gewesen ist, wenn auch höher als bei den umgegossenen Stäben. Die gezogenen Stäbe zeigten aber keine Sprödigkeit, die gegossenen Stäbe, welche in einer hiesigen Metallgiesserei hergestellt, bei einer nahe dem Schmelzpunkt liegenden Temperatur gegossen waren, zeigten keine besondere Geschmeidigkeit. Letztere Eigenschaft freilich kann auch in der absolut geringeren Consistenz des Gussstabes überhaupt liegen.

1) Karsten's Archiv f. Min., Geol. und Hüttenk. 1.

Ann. d. Phys. u. Chem. N. F. 54.

Auf den Grundlagen der Arbeit von Bolley baut Rammelsberg seine Ansicht auf. Er hebt besonders die Art der Abkühlung, die übrigens auch Bolley unterschieden hatte, hervor und bemerkte, dass langsam gekühltes Material bei gewöhnlicher Temperatur gute Resultate lieferte, schnell gekühltes spröde und rissige Bleche gab. Meine Versuchszahlen weisen keinen Unterschied der Abkühlungsart auf, da nur die gegossenen Stäbe rasch gekühlt die hervorgehobenen Unregelmässigkeiten deutlicher zeigen als die langsam gekühlten. Das Anwärmen zur Untersuchungstemperatur beeinflusst die Härtung wenig, da die Temperatur des Bunsenbrenners bedeutend grösser als die später durch das Oelbad erreichte war. Dass bei Zink die Härtung bei weitem keine so vollkommene war, als dies bei Eisen oder Stahl der Fall ist, folgt übrigens auch aus dem niedrigen Schmelzpunkt des Zinks.

Schlussfolgerungen.

Alles zusammengenommen stimmen meine Resultate mit den hauptsächlichsten der angeführten Arbeiten wenig überein, da ich jene in der Hauptsache nicht bestätigen kann, wenn auch mehrere sich deckende Punkte vorhanden sind. Bei einer diesbezüglichen Beurtheilung ist indessen nicht zu übersehen, dass die von mir angewandte Versuchsmethode eine äusserst feine Messung ist, welche bei den hervorgehobenen Vorsichtsmaassregeln schwer zu einem deutlichen Hervortreten molecularer Umwandlungen führt. Le Chatelier ging bis zum Bruch bez. der beim Bruch eintretenden Verlängerung Bolley und Rammelsberg unterwarfen ihre Versuchsplatten dem das Material sehr stark beeinflussenden Walzverfahren. Kalischer wies die Krystallisation durch Anäthen nach; während bei meinen Messungen nur sehr vereinzelt der Torsionswinkel 45° betrug, meist wegen der mit der Temperatur für die Messung zu gross werdenden Geschmeidigkeit des Materials auch klein gehalten werden musste. Die Maximalbelastung war immer in so kurzer Zeit erreicht, dass zu auffallenden Differenzen bei den Ausschlägen wenig Zeit war, die Wandstreben hinderten eine weitere Torsion des Stabes, sodass die Deformationen in engen Grenzen bleiben mussten.

Bei diesen theilweise durch die Versuchsanordnung bedingten abweichenden Resultaten tritt die Schlussfolgerung deutlich hervor, dass das elastische Verhalten, welches hier eigentlich untersucht und gemessen worden ist, eine ganz andere Eigenschaft eines Metalls ist als die Sprödigkeit, denn sonst müssten die Curven in dem fraglichen Intervall, wo Sprödigkeit eintritt, eine Aenderung zeigen. Gezogenes Zink zeigt dieselbe garnicht, bei gegossenen Zink waren nur Anzeichen eintretender Sprödigkeit vorhanden.

Am Schluss dieser Arbeit sei es mir gestattet Hrn. Geh. Hofrath Prof. Dr. Wiedemann für die mir bei meiner Arbeit in reichem Maasse zu Theil gewordene Anregung, zugleich auch für das mir gütigst zur Verfügung gestellte Material im hiesigen physikalischen Institut meinen aufrichtigsten Dank zu sagen. Ich verbinde hiermit meinen ergebensten Dank an Hrn. Privatdocent Dr. O. Wiedeburg.

Leipzig, Physik. Inst. der Univ.

10. Ueber die Anwendung des Princips des kleinsten Zwanges auf die Electrodynamik; von A. Wassmuth.

(Aus den Sitzungsberichten der math.-physik. Klasse d. k. bayr. Akad.
der Wissensch. 1894. Bd. 24. Heft 2; mitgetheilt vom Hrn. Verf.)

Ein Punkt m eines Systems von Partikeln möge sich in der Zeit τ , wenn er *frei* wäre, von a nach b bewegen, während seine *wirkliche* Bewegung durch die Strecke ac dargestellt sei; dann sagt bekanntlich das von Gauss aufgestellte Princip des kleinsten Zwanges aus, dass $\Sigma m \cdot b c^2$ ein Minimum ist oder dass, wenn ad irgend eine virtuelle, d. h. mit den Bedingungen des Systems verträgliche Bewegung vorstellt, stets: $\Sigma m \cdot b c^2 < \Sigma m \cdot b d^2$ sein muss. Sind $x y z$ die Coordinaten des Punktes m , auf den die Kräfte $m X, m Y, m Z$ wirken sollen, so geht irgend eine Coordinate x in der sehr kleinen Zeit τ für die wirkliche Bewegung über in:

$$x + \frac{dx}{dt} \tau + \frac{1}{2} \frac{d^2 x}{dt^2} \tau^2$$

und für die freie Bewegung über in:

$$x + \frac{dx}{dt} \tau + \frac{1}{2} X \tau^2,$$

sodass das Quadrat der Ablenkung $b c^2$ oder das Quadrat der Coordinatendifferenzen gleich

$$\frac{1}{4} \left[\left(\frac{d^2 x}{dt^2} - X \right)^2 + \dots \right]$$

wird. Man hat daher einen Ausdruck Z' von der Form

$$Z' = \Sigma m \left[\left(\frac{d^2 x}{dt^2} - X \right)^2 + \left(\frac{d^2 y}{dt^2} - Y \right)^2 + \left(\frac{d^2 z}{dt^2} - Z \right)^2 \right],$$

wobei sich die Summe auf alle Partikeln erstreckt, zu einem Minimum in Bezug auf die diversen Beschleunigungen: $d^2 x/dt^2, d^2 y/dt^2 \dots$, die kurz $\ddot{x}, \ddot{y}, \ddot{z} \dots$ geschrieben werden sollen, zu machen. Differentiert man dabei die Bedingungsgleichungen des Systems: $q_1 = 0, q_2 = 0 \dots$ zweimal nach der Zeit, so

muss man sich, wie aus der obigen Ableitung hervorgeht¹⁾ gegenwärtig halten, dass die Coordinaten x und ihre ersten Differentialquotienten als „gegeben“ anzusehen sind; die Gleichung $(d^2 \varphi / dt^2) = 0$ drückt nur aus, dass die $(\partial \varphi / \partial t) \ddot{x} + \dots$ unveränderlichen Werthen gleich sein müssen. Für gegebene Werthe der x und dx/dt sollen also die \ddot{x} so bestimmt werden, dass Z' zu einem Minimum werde. Man erhält so die bekannten Gleichungen:

$$m(\ddot{x} - X) + \lambda_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} + \lambda_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} + \dots = 0 \text{ etc.}$$

Statt der Coordinaten xyz sollen nun n voneinander unabhängige Variabeln $p_1 p_2 p_3 \dots p_n$ eingeführt werden, sodass die virtuelle Arbeit $= P_1 \delta p_1 + P_2 \delta p_2 + \dots + P_n \delta p_n$ und die lebendige Kraft

$$T = \frac{1}{2} \sum_{\kappa \lambda} a_{\kappa \lambda} \dot{p}_\kappa \dot{p}_\lambda$$

wird, wobei die P_μ und $a_{\kappa \lambda} = a_{\lambda \kappa}$ nur von den Coordinaten abhängen und die griechischen Buchstaben, wie im Folgenden immer, von 1 bis n gehen.

Dann wird die zu einem Minimum zu machende Function Z (Zwang genannt), wie Lipschitz²⁾ zeigte, ausgedrückt durch:

$$Z = \sum_{\mu \nu} \frac{A_{\mu \nu}}{4} \left[a_{1\mu} \ddot{p}_1 + a_{2\mu} \ddot{p}_2 + \dots + \begin{bmatrix} 11 \\ \mu \end{bmatrix} \dot{p}_1 \dot{p}_1 + \begin{bmatrix} 12 \\ \mu \end{bmatrix} \dot{p}_1 \dot{p}_2 + \dots - P_\mu \right] \\ \left[a_{1\nu} \ddot{p}_1 + a_{2\nu} \ddot{p}_2 + \dots + \begin{bmatrix} 11 \\ \nu \end{bmatrix} \dot{p}_1 \dot{p}_1 + \begin{bmatrix} 12 \\ \nu \end{bmatrix} \dot{p}_1 \dot{p}_2 + \dots - P_\nu \right],$$

wobei A die Determinante aus den $a_{\kappa \lambda}$ und $A_{\mu \nu}$ die adjungirte

$$(A_{\mu \nu} = \frac{\partial A}{\partial a_{\mu \nu}})$$

vorstellt und

$$\begin{bmatrix} \kappa \lambda \\ \mu \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial a_{\kappa \mu}}{\partial p_\lambda} + \frac{\partial a_{\lambda \mu}}{\partial p_\kappa} - \frac{\partial a_{\kappa \lambda}}{\partial p_\mu} \right]$$

gesetzt ist.

1) Lipschitz, Borch. Journ. 82. p. 316 (Rausenberger Mechanik I, p. 166); Gibbs, Beibl. 4. p. 319.

2) Lipschitz, l. c. p. 330.

Der Ausdruck für Z wird übersichtlicher und für (gewisse) physikalische Probleme geeigneter, wenn die lebendige Kraft T eingeführt wird. Setzt man nämlich:

$$T_\mu = \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{p}_\mu} - \frac{\partial T}{\partial p_\mu},$$

so ist¹⁾ auch

$$T_\mu = a_{1\mu} \dot{p}_1 + a_{2\mu} \dot{p}_2 + \dots + \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \mu & \end{bmatrix} \dot{p}_1 \dot{p}_1 + \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ \mu & \end{bmatrix} \dot{p}_1 \dot{p}_2 + \dots$$

und es wird:

$$(I) \quad Z = \sum_{\mu\nu} \frac{A_{\mu\nu}}{A} [T_\mu - P_\mu] [T_\nu - P_\nu],$$

d. i.:

$$Z = \frac{1}{A} \left\{ \begin{array}{l} A_{11} (T_1 - P_1)^2 + A_{22} (T_2 - P_2)^2 + \dots \\ + 2 A_{12} (T_1 - P_1) (T_2 - P_2) + \dots \\ + 2 A_{23} (T_2 - P_2) (T_3 - P_3) + \dots \end{array} \right\}$$

Da dieser Ausdruck für den Zwang Z , wie es scheint, neu ist, so ist es nicht überflüssig, nachzuweisen, dass man in Ausführung der Minimumsbedingung für Z zu den Lagrange'schen Gleichungen kommt. Dabei hat man zufolge der obigen Bemerkung bei der Differentiation des Z nach \dot{p}_1 die Größen p_1 und \dot{p}_1 als *gegeben* oder *fix* anzusehen und von der Beziehung:

$$\frac{\partial T_\mu}{\partial \dot{p}_\kappa} = a_{\mu\kappa} = a_{\kappa\mu}$$

Gebrauch zu machen. Man erhält so:

$$\frac{\partial Z}{\partial \dot{p}_1} = \sum_{\mu\nu} \frac{a_{1\mu} A_{\mu\nu}}{A} (T_\nu - P_\nu) + \sum_{\mu\nu} \frac{a_{1\nu} A_{\mu\nu}}{A} (T_\mu - P_\mu)$$

oder, da diese Summen einander gleich sind,

$$\frac{\partial Z}{\partial \dot{p}_1} = \frac{2}{A} \sum_{\mu\nu} a_{1\mu} A_{\mu\nu} (T_\nu - P_\nu)$$

oder:

$$\frac{1}{A} \sum_\nu (T_\nu - P_\nu) \sum_\mu a_{1\mu} A_{\mu\nu} = \frac{1}{A} \sum_\nu (T_\nu - P_\nu) [a_{11} A_{1\nu} + a_{12} A_{2\nu} \dots]$$

1) Vgl. Rayleigh, Der Schall, p. 111; Stäckel, Borch. Journ. 107, p. 322.

Da nun nach einer Eigenschaft der Determinanten: $a_{11} A_{1r} + a_{12} A_{2r} + \dots = \Delta$ oder Null wird, je nachdem $r = 1$ oder $r > 1$ ist, so folgt also aus $(\partial Z / \partial \ddot{p}_1) = 0$ auch $T_1 - P_1 = 0$, d. i. die Lagrange'sche Gleichung:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{p}_1} - \frac{\partial T}{\partial p_1} = P_1.$$

Für den Zwang Z lassen sich ganz ähnlich, wie man für die Lagrange'sche Gleichung *Nebenformen*¹⁾ aufstellte, noch andere Ausdrücke finden.

Wichtig für die Anwendung ist die Bemerkung, dass sich der Zwang Z so darstellen lässt, dass darin *eine* Beschleunigung, z. B. \ddot{p}_1 , von den übrigen losgelöst erscheint; es ist:

$$Z \cdot \Delta = \frac{1}{2} (L_1 \ddot{p}_1^2 + 2 M_1 \ddot{p}_1 + N_1),$$

wo die $L_1 M_1 N_1$ die \ddot{p}_1 nicht enthalten und L_1 und M_1 aus $(\partial Z / \partial \ddot{p}_1) = 0$ leicht gefunden werden können.

„Sind bei einem physikalischen Probleme die virtuelle Arbeit

$$\sum_{\mu} P_{\mu} \delta p_{\mu}$$

und die lebendige Kraft

$$T = \frac{1}{2} \sum_{\alpha \lambda} a_{\alpha \lambda} \dot{p}_{\alpha} \dot{p}_{\lambda}$$

gegeben, so lässt sich mittels der Gleichung (I) der Zwang des Systems bestimmen; die Minimumseigenschaft von Z drückt ein — in vielen Fällen *sicher neues — Gesetz für das System* aus, ganz abgesehen davon, dass andere, vielleicht schon bekannte Gesetze durch wirkliches Differentiiren des Z daraus folgen.“

So hat z. B. Hr. Boltzmann in wundervoll einfacher Weise an der Hand der Lagrange'schen Gleichungen, somit sich stützend auf mechanische Vorgänge, in seinen Vorlesungen I die Maxwell'schen Gleichungen der Electricität abgeleitet. Es erhellt, dass man auch vom Prinzip des kleinsten Zwanges in der Form der obigen Gleichung I als Obersatz ausgehen kann und, da die virtuelle Arbeit und die lebendige Kraft angegeben werden, durch Aufsuchen der

1) Weinstein, Wied. Ann. 15; Budde, Mechanik 1. p. 397.

Minimumsbedingungen zu den Lagrange'schen Gleichungen und — nun ganz an der Hand Boltzmann's fortschreitend — zu den Maxwell'schen Gleichungen kommen muss. Wenn es auch auf diese Art schwer möglich sein wird, die klassischen Methoden Boltzmann's, besonders die im zweiten Theile seiner Vorlesungen, noch mehr zu vereinfachen, so drückt die Bedingung: $Z = \text{Minimum}$ immerhin eine *neu erkannte* Wahrheit aus.

Als ein Beispiel möge der Fall von zwei cyklischen Coordinaten $\dot{p}_1 = l'_1$ und $\dot{p}_2 = l'_2$ — von den langsam veränderlichen Parametern k werde einstweilen abgesehen — betrachtet werden. Hier ist:

$$T = \frac{1}{2} a_{11} \dot{p}_1^2 + \frac{1}{2} a_{22} \dot{p}_2^2 + a_{12} \dot{p}_1 \dot{p}_2 = \frac{A}{2} l'_1^2 + \frac{B}{2} l'_2^2 + C l'_1 l'_2,$$

wenn Boltzmann's Bezeichnung eingeführt wird. Es folgt:

$$a_{11} = A, \quad a_{22} = B, \quad a_{12} = C,$$

$$A = \begin{vmatrix} A & C \\ C & B \end{vmatrix} = AB - C^2, \quad A_{11} = B, \quad A_{12} = -C, \quad A_{22} = A,$$

$$T_1 = \frac{d}{dt} (A l'_1 + C l'_2), \quad T_2 = \frac{d}{dt} (B l'_2 + C l'_1).$$

Ausserdem möge wegen der Reibung oder Zähigkeit die von Rayleigh¹⁾ aufgestellte Zerstreuungsfunktion durch

$$F = \frac{1}{2} \Sigma (x_1 \dot{x}_1^2 + \dots) = \frac{1}{2} b_{11} \dot{p}_1^2 + \frac{1}{2} b_{22} \dot{p}_2^2 + b_{12} \dot{p}_1 \dot{p}_2$$

bezeichnet werden; dann tritt bekanntlich zu den Kräften $P_\mu = L_\mu$ noch hinzu: $-(\partial F / \partial \dot{p}_\mu)$. Auch erhellt aus inneren Gründen, dass $b_{12} = 0$ ist.

Hiermit wird denn schliesslich der Zwang Z ausgedrückt durch:

$$\begin{aligned} Z \times (AB - C^2) &= B \left[\frac{d}{dt} (A l'_1 + C l'_2) - L_1 - b_{11} l'_1 \right]^2 \\ &\quad - 2C \left[\frac{d}{dt} (A l'_1 + C l'_2) - L_1 - b_{11} l'_1 \right] \left[\frac{d}{dt} (B l'_2 + C l'_1) - L_2 - b_{22} l'_2 \right] \\ &\quad + A \left[\frac{d}{dt} (B l'_2 + C l'_1) - L_2 - b_{22} l'_2 \right] \end{aligned}$$

und es soll Z ein Minimum sein, derart, dass $(\partial Z / \partial l'_1) = 0$ und $(\partial Z / \partial l'_2) = 0$ ist. Hierin stellen²⁾ l'_1 und l'_2 die Strom-

1) Rayleigh, l. c. p. 108 u. 109.

2) Boltzmann, l. c. p. 34 u. 35.

stärken in zwei Leitern, b_{11} und b_{22} deren Widerstände, L_1 und L_2 die electromotorischen Kräfte in ihnen, A und B die Coefficienten der Selbstinduktion und C den der gegenseitigen Induktion vor. Sind noch Condensatoren eingeschaltet¹⁾, so treten noch Glieder von der Form $d_1 l_1$ und $d_2 l_2$ in die Klammern.

Die Bedingung: $Z = \text{Minimum}$ spricht also ein *electrodynamisches Grundgesetz* aus und liefert die Theorie der Selbstinduktion und wechselseitigen Induktion für nicht zu schnelle Stromschwankungen. Will man auch die ponderomotorischen Kräfte erhalten, so muss ein langsam veränderlicher Parameter k neben l_1 und l_2 als dritte Variable eingeführt, der allgemeine Ausdruck für Z aufgestellt und die Gleichung $(\partial Z / \partial k) = 0$, wobei k und k als constant anzusehen sind, gebildet werden; erst *nachher* hat man $k = 0$ und $k = 0$ zu nehmen und erhält, wie Boltzmann, die Beziehung:

$$K = -\frac{\partial T}{\partial k} = -\frac{l_1'^2}{2} \frac{\partial A}{\partial k} - \frac{l_2'^2}{2} \frac{\partial B}{\partial k} - l_1' l_2' \frac{\partial C}{\partial k}.$$

Auch die Akustik bietet ein weites Feld zur Anwendung des obigen Principes. Es treten da häufig in dem Ausdrucke für die lebendige Kraft nur rein quadratische Glieder mit gleichen Coefficienten auf, weshalb sich dann die Gleichung für den Zwang einfacher gestaltet.

Führt man die Abkürzung $T_\mu - P_\mu = Q_\mu$ ein, so ist der Zwang Z gegeben durch:

$$\begin{aligned} Z \cdot D &= \sum_{\mu\nu} A_{\mu\nu} (T_\mu - P_\mu)(T_\nu - P_\nu) = \sum_{\mu\nu} Q_\mu Q_\nu \\ &= A_{11} Q_1^2 + 2 A_{12} Q_1 Q_2 + \dots + 2 A_{1n} Q_1 Q_n \\ &\quad + A_{22} Q_2^2 + \dots + 2 A_{2n} Q_2 Q_n \\ &\quad + A_{nn} Q_n^2 \end{aligned}$$

Die Bedingung: $(\partial Z / \partial p_\mu) = 0$ lässt sich durch $\partial Z / \partial Q_\mu = 0$ ersetzen. Man hat nämlich:

$$\frac{\partial Z}{\partial p_\mu} = \frac{\partial Z}{\partial Q_1} \frac{\partial Q_1}{\partial p_\mu} + \dots + \frac{\partial Z}{\partial Q_n} \frac{\partial Q_n}{\partial p_\mu}$$

oder wegen

1) Boltzmann, l. e. p. 35.

$$\frac{\partial Q_v}{\partial \dot{p}_\varrho} = \frac{\partial T_v}{\partial \dot{p}_\varrho} = a_{v\varrho}$$

$$\frac{dZ}{d\dot{p}_\varrho} = a_{1\varrho} \frac{\partial Z}{\partial Q_1} + a_{2\varrho} \frac{\partial Z}{\partial Q_2} + \dots + a_{n\varrho} \frac{\partial Z}{\partial Q_n} = 0; \quad (\varrho = 1 \dots n);$$

aus diesen n -Gleichungen folgt, da die Determinante $D = |a_{\mu\nu}|$ nicht verschwindet, allgemein:

$$\frac{\partial Z}{\partial Q_v} = 0.$$

Differentiirt man demnach den obigen Ausdruck wirklich, so ergeben sich die n -Gleichungen:

$$\frac{1}{2} \frac{\partial Z}{\partial Q_v} = A_{1v} Q_1 + A_{2v} Q_2 + \dots + A_{nv} Q_n = 0; \quad (v = 1 \dots n)$$

die, da die Determinante $|A_{\mu\nu}| = D^{n-1}$ nie Null werden kann, wiederum die Lagrange'schen Gleichungen $Q_1 = 0 \dots Q_n = 0$ nach sich ziehen.

Haben die Kräfte P ein Potential U , sodass

$$P_\mu = - \frac{\partial U}{\partial p_\mu}$$

wird, und enthalten die Bedingungen die Zeit t explicit nicht, so hat man für die lebendige Kraft T einerseits:

$$2T = \frac{\partial T}{\partial \dot{p}_1} \dot{p}_1 + \frac{\partial T}{\partial \dot{p}_2} \dot{p}_2 + \dots$$

oder

$$2 \frac{dT}{dt} = \dot{p}_1 \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{p}_1} \right) + \dot{p}_1 \frac{\partial T}{\partial \dot{p}_1} + \dots$$

während anderseits, da T auch Function von $p_1 \dot{p}_1 \dots$ ist

$$\frac{dT}{dt} = \dot{p}_1 \frac{\partial T}{\partial p_1} + \dot{p}_1 \frac{\partial T}{\partial \dot{p}_1} + \dots$$

wird; hieraus folgt durch Subtraction wegen:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{p}_\mu} \right) - \frac{\partial T}{\partial p_\mu} = T_\mu$$

$$\frac{dT}{dt} = \dot{p}_1 T_1 + \dot{p}_2 T_2 + \dots$$

wozu man

$$\frac{dU}{dt} = \frac{\partial U}{\partial p_1} \dot{p}_1 + \dots = -\dot{p}_1 P_1 - \dot{p}_2 P_2 \dots$$

addirt und so schliesslich wegen $T_\mu - P_\mu = Q_\mu$ zur Gleichung:

$$\frac{d(T+U)}{dt} = \dot{p}_1 Q_1 + \dot{p}_2 Q_2 + \dots + \dot{p}_n Q_n = R$$

gelangt. Man sieht sofort, dass für $Q_1 = 0 \dots Q_n = 0$ auch $R = 0$, d. i. $T + U = \text{Constante}$ sein muss oder dass sich aus den oben gefundenen Lagrange'schen Gleichungen auch das Prinzip der Erhaltung der Energie ergiebt. Beides lässt sich *gleichzeitig* gewinnen, wenn man in dem Ausdrücke für Z mit Hülfe der Beziehung $R = \dot{p}_1 Q_1 + \dots$ eine der Grössen Q , z. B. Q_1 , eliminiert und die Minimumsbedingungen:

$$\frac{\partial Z}{\partial Q_1} = 0 \dots \frac{\partial Z}{\partial Q_n} = 0$$

nachher aufstellt. Zweckmässig ist es dabei, für den Zwang Z die Determinantenform anzuwenden; es ist z. B. für $n = 3$:

$$-Z, D = \begin{vmatrix} 0 & Q_1 & Q_2 & Q_3 \\ Q_1 & a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ Q_2 & a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ Q_3 & a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \frac{1}{\dot{p}_1^2} \begin{vmatrix} 0 & R & Q_2 & Q_3 \\ R & b_{11} & b_{21} & b_{31} \\ Q_2 & b_{21} & a_{22} & a_{23} \\ Q_3 & b_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

wobei

$$b_{11} = (a_{11} \dot{p}_1 + a_{21} \dot{p}_2 + a_{31} \dot{p}_3) \dot{p}_1 + \dots = \frac{\partial T}{\partial \dot{p}_1} \dot{p}_1 + \dots = 2 T$$

$$b_{21} = b_{12} = a_{21} \dot{p}_1 + a_{22} \dot{p}_2 + a_{23} \dot{p}_3 = \frac{\partial T}{\partial \dot{p}_2}$$

$$b_{31} = b_{13} = a_{31} \dot{p}_1 + a_{32} \dot{p}_2 + a_{33} \dot{p}_3 = \frac{\partial T}{\partial \dot{p}_3}$$

ist. Die Ausführung der Minimumsbedingungen ergiebt:

$$A_{11} R + Q_3 [\dot{p}_1 A_{12} - \dot{p}_2 A_{11}] + Q_2 [\dot{p}_1 A_{13} - \dot{p}_3 A_{11}] = 0$$

$$A_{12} R + Q_2 [\dot{p}_1 A_{22} - \dot{p}_2 A_{12}] + Q_3 [\dot{p}_1 A_{23} - \dot{p}_3 A_{12}] = 0$$

$$A_{13} R + Q_3 [\dot{p}_1 A_{33} - \dot{p}_2 A_{13}] + Q_2 [\dot{p}_1 A_{32} - \dot{p}_3 A_{13}] = 0$$

oder, da die Determinante dieses Systems $\dot{p}_1^2 | A_{\mu\nu} | = \dot{p}_1^2 \cdot D^2$ nie verschwindet, $R = 0$ und $Q_2 = 0$, $Q_3 = 0$, d. i. das Prinzip von der Energie *und* die Lagrange'schen Gleichungen.

Eliminirt man in der allgemeinen Gleichung

$$A_1, Q_1 + A_2, Q_2 + \dots + A_n, Q_n = 0, \nu = 1 \dots$$

etwa Q_1 , mit der Relation $R = \dot{p}_1 Q_1 + \dots$, so folgt natürlich ebenso $R = 0$, $Q_2 = 0 \dots Q_n = 0$.

Nachtrag,

betreffend lineare Stromverzweigungen.

Sind $p_1 \dots p_n$ wiederum cyklische Coordinaten,

$$T = \frac{1}{2} a_{11} \dot{p}_1^2 + \frac{1}{2} a_{22} \dot{p}_2^2 + \dots + a_{12} \dot{p}_1 \dot{p}_2 + \dots$$

die lebendige Kraft und ist

$$F = \frac{1}{2} b_{11} \dot{p}_1^2 + \frac{1}{2} b_{22} \dot{p}_2^2 + \dots + b_{12} \dot{p}_1 \dot{p}_2 + \dots$$

die von Lord Rayleigh eingeführte Zerstreuungsfunktion, so kommt zu jeder Kraft P_μ noch die Kraft:

$$-\frac{\partial F}{\partial \dot{p}_\mu} = -(b_{1\mu} \dot{p}_1 + b_{2\mu} \dot{p}_2 + \dots)$$

dazu und es ergibt das Princip des kleinsten Zwanges, dass

$$(1) \quad Z \cdot D = \sum A_{\mu\nu} Q_\mu Q_\nu = A_{11} Q_1^2 + A_{22} Q_2^2 + \dots + 2 A_{12} Q_1 Q_2 + \dots$$

ein Minimum für jedes Q sein müsse; dabei ist also:

$$(2) \quad Q_\mu = \frac{d}{dt} [a_{1\mu} \dot{p}_1 + a_{2\mu} \dot{p}_2 + \dots] - P_\mu + [b_{1\mu} \dot{p}_1 + b_{2\mu} \dot{p}_2 + \dots]$$

$$D = |a_{\mu\lambda}| \quad A_{\mu\lambda} = \frac{\partial D}{\partial a_{\mu\lambda}}.$$

Geht man zur Electrodynamik über und setzt:

$$\dot{p}_1 = J_1, \quad \dot{p}_2 = J_2 \dots,$$

sowie

$$(3) \quad Q_\mu = \frac{d}{dt} [a_{1\mu} J_1 + a_{2\mu} J_2 + \dots] - P_\mu + [b_{1\mu} J_1 + \dots]$$

so gibt die *Minimumsbedingung* (1) eine Eigenschaft einer linearen Stromverzweigung an. Dabei sind $a_{11}, a_{22}, a_{33} \dots$ die Coefficienten der Selbstinduktion des ersten, zweiten Umlaufes, $a_{12}, a_{13}, a_{23} \dots$ die Coefficienten der gegenseitigen Induktion, P_μ die constante electromotorische Kraft; ferner ist b_{11} der Widerstand des ganzen ersten Umlaufes, b_{22} der Widerstand des ganzen zweiten Umlaufes etc. und b_{12} der Widerstand jenes Stückes der Leitung, das dem ersten und zweiten Umlaufe gemeinsam ist; b_{12} ist positiv, wenn J_1 und J_2 dieselbe, negativ, wenn sie entgegengesetzte Richtungen haben. Die Ausführung der Minimumsbedingung $(\partial Z / \partial Q_1) = 0$ liefert $Q_1 = 0$, d. i.:

$$(4) \quad P_1 = b_{11} J_1 + b_{12} J_2 + \dots + b_{1n} J_n + \frac{d}{dt} [a_{11} J_1 + a_{12} J_2 + \dots] \text{ etc.}$$

Das sind — etwas verallgemeinert — jene Gleichungen, die Hr. v. Helmholtz¹⁾ für die Induction in linearen Stromverzweigungen, die man sich in die möglichst geringe Zahl einfacher Umgänge zerlegt denken muss, aufgestellt hat.

Für die Arbeit der verzögernden Kräfte erhält man vom Zeichen adgesehen:

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial p_1} dp_1 + \dots &= \left[\frac{\partial F}{\partial p_1} \dot{p}_1 + \dots \right] dt = 2 F dt \\ &= [b_{11} J_1^2 + b_{22} J_2^2 + \dots + 2 b_{12} J_1 J_2 + \dots] dt, \end{aligned}$$

d. i. die Joule'sche Wärme und sind alle Summanden in der Klammer positiv.

Nun werde angenommen, dass $a_{12} = a_{13} = a_{23} = \dots = 0$; $a_{11} = a_{22} = a_{33} = \dots = a$ sei, welcher Fall experimentell unschwer zu verwirklichen wäre. Dann wird:

$$Q_\mu = a \frac{d}{dt} [J_1 + J_2 + \dots] - P_\mu + b_{1\mu} J_1 + b_{2\mu} J_2 + \dots$$

und es muss $Z \cdot a = Q_1^2 + Q_2^2 + \dots$ ein Minimum sein, wie klein auch a genommen wird. Für $\lim a = 0$ werden die Stromstärken unabhängig von der Zeit, also constant, und es folgt aus der Bedingung:

$$Z^1 = Q_1^2 + Q_2^2 \dots = \text{Minimum}; \quad Q_\mu = b_{1\mu} J_1 + \dots - P_\mu = 0.$$

Die Gleichung $(\partial Z^1 / \partial Q_\mu) = 0$ kann, weil die Determinante aus den b nicht verschwindet, durch $(\partial Z^1 / \partial J_\mu) = 0$ ersetzt werden. Es ist demnach für *constante* Ströme:

$$Z^1 = \sum_\mu [(b_{1\mu} J_1 + \dots) - P_\mu]^2$$

für jedes J zu einem Minimum zu machen.

Anmerkung. Eine weitere, oft genannte Minimumseigenschaft für *constante* Ströme ergiebt sich aus der wohlbekannten Gleichung:

$$\frac{d(T+U)}{dt} = -2F,$$

oder:

$$(I) \quad - \left[\frac{dU}{dt} + F + \frac{dT}{dt} \right] = F,$$

1) H. v. Helmholtz, Abh. 1. p. 435.

worin $U = P_1 p_1 + \dots$ das Potential der constanten Kräfte vorstellt und wie oben:

$$T = \frac{1}{2} a_{11} \dot{p}_1^2 + \dots = \frac{1}{2} a_{11} J_1^2 + \dots; \quad F = \frac{1}{2} b_{11} \dot{p}_1^2 + \dots = \frac{1}{2} b_{11} J_1^2 + \dots$$

ist.

Erlangen die Stromstärken $J_1, J_2 \dots$, die anfangs Null waren, für $t = \infty$ ihre vollen Stärken $J'_1, J'_2 \dots$, so ist (wegen

$$\frac{d T}{d t} = \frac{\partial T}{\partial J_1} \frac{d J_1}{d t} + \dots$$

auch $(d T/d t) = 0$ und das in (I) rechts stehende F , das aus lauter positiven Gliedern besteht, erlangt seinen *grössten* Werth. Demnach wird die negative linke Seite in (I), d. i.

$$F + \frac{d U}{d t} = \frac{1}{2} b_{11} J_1^2 + \dots - (P_1 J_1 + P_2 J_2 + \dots)$$

ein Minimum für jedes J darstellen.

Kräfte

$I_1^2 \dots$

Null
wegen

as aus
Werth.

11. *Die farbigen Wässer der Caprenser Grotten,
der schweizer Eishöhlen und Yellowstonequellen;
von H. W. Vogel.*

Vor 20 Jahre hatte ich Gelegenheit, das Licht der blauen Grotte auf Capri spectroskopisch zu untersuchen.¹⁾ Auffällig war bei der blauen Grotte das Auftreten eines sonst nicht im gewöhnlichen Wasser beobachteten Absorptionsstreifens zwischen den Frauenhofer'schen Linien *b* und *E* neben einer Auslöschung des Roth und Rothgelb bis Linie *D*. Dieses Spectrum beobachtete ich nicht nur in dem Wasser innerhalb der Grotte sondern auch vor derselben.

In diesem Jahre hatte ich Gelegenheit, diese Untersuchungen auch auf die übrigen Grotten (grotto verte und grotto rosso) der Insel auszudehnen. Dieselben liegen dicht nebeneinander auf der Südseite der Insel, während die blaue Grotte sich auf der Nordseite befindet. Ich machte die Partie bei absolut blauem Himmel und Sonnenschein in Gesellschaft von Malern, deren Farbenurtheil mir nicht unwillkommen war. Die grüne Grotte ist ein mit blaugrünem Meerwasser erfüllter zerklüfteter kurzer Felsentunnel, der den Namen einer Grotte nicht verdient. Die Felsenwände sind gelblich gefärbt. Nur im Innern des Tunnels bemerkte man an dem Gestein grüne Reflexe, die dem aus den Meerwasser reflectirten Lichte entstammen, zu welchen die Eigenfarbe der Felsen tritt. Richtet man das Spectroskop auf das Wasser selbst, so erkennt man nur eine Absorption des rothen Endes des Spectrums; von dem Absorptionsstreifen des Lichtes der blauen Grotte auf den Linien *b E* aber nicht die Spur. Kurz vor der Einfahrt in die grüne Grotte befindet sich jedoch ein sehr scharf abgegrenzter Fleck wundervoll azurblau schillernden Wassers, welches sich sehr deutlich von dem grünblauen benachbarten Meerewasser abhebt und sofort an das Wasser der blauen Grotte erinnerte. In der That zeigte dieser Fleck auch den Absorptionsstreifen

1) H. W. Vogel, vgl. Pogg. Ann. 156. p. 326. 1875.

auf *b E* wie das Wasser der blauen Grotte. Bei weiterer Verfolgung des Gegenstandes beobachtete ich von einem hohen Standpunkte nahe der Küste, dass rings um dieselbe im Wasser, nahe dem Lande scharf abgegrenzte zackige azurblaue Flecke, vom grünblauen Meerwasser umsäumt, sichtbar waren. Ich fuhr an einige derselben mit dem Boote heran. Auch sie zeigten den erwähnten Absorptionsstreifen im Grün, während das sie umgebende Meerwasser von diesen nichts erkennen liess. Bei Beobachtungen an verschiedenen Tagen mit ruhiger See schienen die azurblauen Flecke ihren Ort beizubehalten, sie dürften demnach einer lokalen Ursache ihre Entstehung verdanken; welcher? bleibt eine offene Frage.

Die dicht bei der grünen Grotte gelegene rothe (grotto rosso) zeigt von rothem Licht nicht die Spur. Auch die mich begleitenden Maler konnten nichts davon erkennen. Das Spectroskop verrieth nur die Absorptionserscheinungen des gewöhnlichen Meerwassers.

In demselben Sommer besuchte ich die Gletscher des Berner Oberlandes. Die blaue Farbe des Eises derselben ist bekannt. Weniger bekannt scheint es zu sein, dass der frisch gefallene Firnschnee daselbst oberhalb des Rhonegletschers dieselbe blaue Farbe zeigt, wenn man ein metertiefes Loch in denselben mittelst des Alpstocks bohrt. Der Grund der so erhaltenen Röhre schimmert blau, während die Oberfläche des Schnees völlig weiss erscheint. Im Spectroskop zeigt sich in den blauen Schneelöchern nur eine Absorption des rothen Ende des Spectrums, die allmälig nach Gelb hin abnimmt. Ganz dieselbe Absorption zeigten auch die Eishöhlen des Rhone- und des Grindelwaldgletschers; sonstige Absorptionen war nicht zu bemerken. Auftällig waren mir die mit pronomirt *grünem*¹⁾ Wasser angefüllten Geysirbecken im Yellowstone-

1) Auf den in Amerika sehr geschätzten Aquarellen des Yellowstone-parkes vom Maler Moran, welcher die Expedition des Geologen Heyden nach den Park begleitete, erscheinen die Geysirbecken prachtvoll ultramarinblau. Diese Farbe habe ich nie und nirgends im Yellowstonepark beobachtet. Die Farbenbuntheit der Moran'schen Blätter, welche auch durch Prang in Boston im Farbendruck höchst originaltreu reproduciert worden sind, ist im höchsten Grade auffällig für Jedermann. Heyden erklärt dieselbe allerdings für naturtreu, ja er fügt hinzu, sie erreichte

park in Nordamerika, welche ich früher besuchte. Das Spectrum derselben war bei Sonnenschein vorzüglich zu beobachten, indem das Wasser metertief ganz klar erschien, und der weisse Kiesel- oder Kalkgrund der Geysirbecken die Lichtstrahlen kräftigst reflectirte. Hier erkannte man in ausgezeichneter Weise die Schönn'schen Wasserstreifen im Roth resp. Rothgelb.¹⁾

noch nicht den Farbenglanz der Wirklichkeit. Ich bedaure, das nicht bestätigen zu können. Ich habe von der geradezu widerwärtigen Buntscheckigkeit der Moran'schen Blätter nicht das mindeste in der Wirklichkeit beobachten können. Manche Blätter, wie der Yellowstonefall, zeigen, z. B. weisse, hier und da farbig gesprengelte Felswände, wie aus Kaolin mit sehr spärlicher Vegetation. Ich fand dagegen braune, durch bunte Moose farbig gesprengelte Felswände mit reichem Waldstand auf den Gipfeln.

1) Vogel, *Prakt. Spectralanalyse.* 2. p. 320. Berlin 1889.

Berlin, September 1894.

12. *Bemerkung zu der Abhandlung über Lichtemission¹⁾; von G. Jaumann.*

Diese Abhandlung enthält den Nachweis folgender zwei Sätze:

1. Eine *verbreiterte* Spectrallinie zeigt die Emission einer einfachen, aber *gedämpften* Sinusschwingung an.

2. Eine *Spectralbande* zeigt die Emission einer einzigen Sinusschwingung an, welche *gedämpft* und *periodisch erregt* ist.

Den zweiten Satz kann ich ganz für mich in Anspruch nehmen. Die Erregungszahl dürfte eine interessante Constante der Stoffe werden. Ich habe beide Sätze durchaus unabhängig von Molecularvorstellungen gefunden und hoffe sehr, dass der zweite Satz, welcher auf den ersten Blick qualitativ und quantitativ vorzüglich mit der dynamischen Gastheorie stimmt, dieser Theorie bei genauerer Untersuchung noch recht beträchtliche Schwierigkeiten bereiten wird.

Den ersten Satz jedoch habe ich mit Unrecht für neu gehalten. Er wurde schon 1877 von E. v. Lommel²⁾ in seiner Abhandlung „*Theorie der Absorption und Fluorescenz*“, ausgesprochen. Die Lommel'sche Erklärung der Verbreiterung der Spectrallinien durch eine Dämpfung der Emission ist wohl vielen Physikern gleich mir unbekannt geblieben, sie ging in kein Handbuch über und wurde bei Aufstellung anderer Erklärungen der Verbreiterung nicht berücksichtigt. Ich bin Hrn. Prof. E. Wiedemann sehr zu Dank verpflichtet, dass er mich auf die Abhandlung v. Lommel's aufmerksam machte.

Hieran möchte ich die Bemerkung knüpfen, dass die Berechnung der *Intensitätsvertheilung* in der verbreiterten Linie und hauptsächlich der sehr wichtigen Lage des *Intensitätsmaximums* bei Lommel nicht stichhäftig ist.

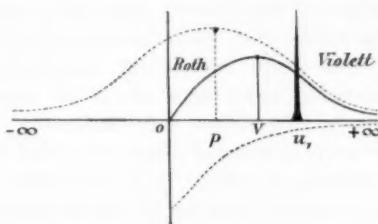
Nach Lommel liegt das Maximum gerade bei der Periode

1) Jaumann, Wien. Akad. **103.** Mai 1894; Wied. Ann. **53.** p. 832. 1894.

2) v. Lommel, Wied. Ann. **3.** p. 251 ff. 1877.

der gedämpften Schwingung, in Wahrheit liegt es jedoch zwischen dieser und der Periode der ungedämpften Schwingung.

Lommel zerlegt nämlich die gedämpfte Schwingung in ein Continuum von Sinusschwingungen mit allen Schwingungszahlen zwischen $-\infty$ und $+\infty$ und erhält eine Amplitudenvertheilung entsprechend der gestrichelten Curve in beistehender Figur, während ich sie in ein Continuum von allen Schwingungen zwischen 0 und $+\infty$ zerlege und die voll ausgezogene Amplitudenvertheilung erhalte, welche der wahren Intensitätsvertheilung im Spectrum entspricht. Jede Farbe kommt nämlich im Lommel'schen Continuum *zweimal* vor, einmal mit positiver und einmal mit negativer Schwingungszahl gerechnet. Man muss diese beiden Amplituden erst subtrahiren, also das



links vom Nullpunkt gelegene Stück der Lommel'schen Curve nach rechts übertragen und von dem rechtsliegenden Stück abziehen, um die wahre Vertheilung zu erhalten. Hierdurch verschiebt sich aber das Maximum beträchtlich nach dem Violett.

Immerhin bleibt eine Verschiebung δ des Maximums der verbreiterten Linie aus der scharfen Linie nach dem *Roth* vorhanden, welche für *kleine* Dämpfungen mit der Dämpfungsconstanten α nach der Gleichung:

$$\alpha = \sqrt{2 u_1 \delta}$$

zusammenhängt, worin u_1 die Periode der ungedämpften Schwingung bedeutet. Diese Verschiebung δ ist das geeignetste Mittel die Dämpfungsconstanten α der Emission für die verschiedenen Stoffe zu bestimmen. Es eignet sich hierzu die

Methode der hohen Interferenzen ¹⁾), welche H. Ebert ²⁾), diesem Zwecke anpasst, am besten. Thatsächlich findet Ebert, dass alle verbreiterten Linien ein wenig nach dem Roth verschoben sind. Von der Fortsetzung der Ebert'schen Messungen hat man also die Kenntniss der Dämpfungsconstanten zu erwarten. Aber schon gegenwärtig bilden diese Messungen eine schöne Bestätigung der Lommel'schen Erklärung der Verbreiterung der Linien.

1) Lippich, Wien. Akad. **72**. p. 355.

2) H. Ebert, Wied. Ann. **34**. p. 40.

diesem
t, dass
schen
hat man
erwarten.
schöne
eiterung

13. *Zur Theorie der Influenzmaschine
mit entgegengesetz rotirenden Scheiben; von
W. Holtz.*

Ich habe der Theorie der Influenzmaschine mit entgegengesetz rotirenden Scheiben bisher keine umfassende Darstellung widmen mögen, weil es lange Zeit nur wenige Physiker gab, welche diese Maschine besessen, und doch nur diese an solcher Arbeit Interesse finden konnten. Seit einer Reihe von Jahren hat sich die Sachlage geändert; die Maschine fängt mehr und mehr an, in Aufnahme zu kommen, zumal im Auslande, wo man sich auch neuerdings wiederholt mit Veränderungen derselben beschäftigt hat. Aber gerade die Art dieser Veränderungen zeigt mir, dass die Theorie noch wenig verstanden wird, da man ganz nebенächliche Dinge scheinbar für wesentlich und solche Einrichtungen für neue Entdeckungen hält. Da möchte ich nun diese Theorie etwas ausführlicher behandeln und hierbei namentlich auf die verschiedenen Formen Rücksicht nehmen, welche man der Maschine geben kann.

Das Grundprincip der Electricitätserregung.

Zwei Streifen ohne Ende aus isolirendem Stoff mögen, der vordere beständig nach rechts, der hintere nach links gezogen werden (Fig. 1). An der Vorderseite stehe links und an der Hinterseite rechts ein Einsauger, mit den Spitzen den Streifen zugewandt. Beide Einsauger mögen miteinander verbunden sein so, dass sich diese Verbindung leicht irgendwo unterbrechen lässt. Dem Einsauger a gegenüber hinter den Streifen sei momentan ein negativ electricischer Körper aufgestellt.

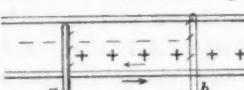


Fig. 1.

Durch die Influenzwirkung des letzteren werden die bisher verbundenen Electricitäten der Vorderseite des vorderen Streifens getrennt. Die gleichnamige negative fliesst in den

Einsauger, während die positive mit dem Streifen weiter geht. Durch seine Influenzwirkung werden hierauf in gleicher Weise die Electricitäten der Hinterseite des hinteren Streifens getrennt. Die gleichnamige positive fliesst in den zweiten Einsauger, während die negative mit dem Streifen weiter geht. Da somit negative Electricität dem Einsauger a gegenübertritt, scheint es, als ob für die Fortsetzung des Processes die Mitwirkung des electrischen Körpers nicht mehr nöthig sei. Das ist indessen nur bedingungsweise richtig. Jeder Streifen ladet den anderen, aber nicht nothwendig dichter, sondern eventuell auch weniger dicht, als er selber geladen war. Ist jede neue Ladung weniger dicht, so muss nach Entfernung des Erregers die electromotorische Thätigkeit sehr bald verloren gehen. Nur wenn sie dichter ist, wird diese sich selbst erhalten, und nicht blos erhalten, sondern verstärken, und zwar solange, bis die Verluste, welche mit wachsender Dichte der Ladung gleichfalls wachsen, keine weitere Verstärkung erlauben.

Schalten wir eine Lücke in die Verbindung der Einsauger, so erschweren wir die Electricitätsbewegung, also auch die Ladung der Streifen. Erhielt sich vorher die electromotorische Thätigkeit, so kann sie nach Einschaltung der Lücke nunmehr verloren gehen. Jedenfalls wird dies einmal geschehen, wenn wir jene beständig grösser machen, nämlich sobald die Electricität hier nicht mehr passiren kann.

Die verschiedenen Formen der Maschine.

Man kann zwei Scheiben als zwei Streifen ohne Ende betrachten und an solchen das gedachte Princip in Anwendung bringen und zwar, wie sich gezeigt hat, in verschiedener Weise, sodass dieselbe Maschine bei demselben Grundprincipe verschiedene Formen haben kann.

Fig. 2 zeigt die einfachste Anordnung, und zwar mit zwei Einsaugern a und b , welche nur zur Ladung der Scheiben dienen, und einem Doppelleinsauger c , welcher die Scheiben nur entladet und so bewirkt, dass sie unelectrisch wieder zu den ersten kommen. Der Erreger sei allemal negativ und dem Einsauger a gegenübergestellt. Dann geben hier, wie auch in der Folge, die beigefügten Zeichen den richtigen electrischen Zustand der Scheiben an, wobei die dunkleren

für die vordere, die helleren für die hintere gelten. Dass erstere nebenbei auf einem grösseren, letztere auf einem kleineren Kreise liegen, darf nicht so gedeutet werden, als ob jede Scheibe überhaupt nur in dem betreffenden Kreise electricisch sei. Diese erste Form der Maschine wirkt quantitativ sehr schwach, weil nur der Ladungsstrom, wie man sieht, durch die Electroden fliesst, aber auch intensiv schwach, weil man diese, damit die Thätigkeit der Maschine nicht aufhört, nur wenig voneinander entfernen darf. Ich habe auch diese Form schon in meiner ersten Arbeit mit aufgeführt.¹⁾

Fig. 3 entsteht, wenn wir statt eines Doppelinsaugers für die Entladung deren zwei anbringen und zwischen diese die Electroden schalten, während die beiden Ladungseinsauger constant verbunden bleiben. Diese Form wirkt quantitativ

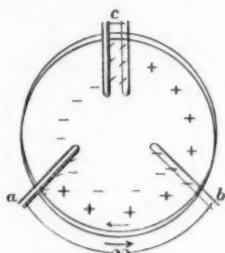


Fig. 2.

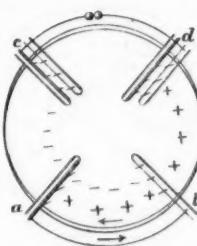


Fig. 3.

wie die erste, weil der Entladungsstrom quantitativ gleich dem Ladungsstrom ist, aber gibt viel längere Funken, da man hier, ohne dass die Thätigkeit aufhört, die Electroden beliebig voneinander entfernen kann. Steht statt des einen der beiden Doppelinsauger ein einfacher, so ist die Wirkung zwar der Hauptsache nach ebenso, aber sie ist unsymmetrisch, weil an dem einen der beiden Pole dann stets eine grössere Dichte als an dem anderen herrscht. In dieser Fassung und zwar mit Ableitung eines der Pole habe ich die vorstehende Form in meiner ersten Arbeit p. 135 aufgeführt, habe indessen schon in dem Nachtrage zu dieser Arbeit p. 169 auf den Vorzug des zweiten Doppelinsaugers aufmerksam gemacht. Die gleiche Zeichnung wie Fig. 3 findet sich in einer späteren meiner Arbeiten.²⁾

1) W. Holtz, Pogg. Ann. **130**. p. 134. 1867.

2) W. Holtz, Uppenborn's Centralbl. f. Electr. p. 684. 1883.

Fig. 4 zeigt die Maschine mit vier einfachen Einsaugern, und zwar so, dass diese der Reihe nach abwechselnd an verschiedenen Seiten der Scheiben liegen, wobei es gleichgültig ist, ob die Electroden zwischen *c* und *d* oder zwischen *a* und *b* befestigt sind. Diese Form ist praktisch einfacher, aber theoretisch complicerter, weil jeder Einsauger hier eine Entladung und zugleich eine neue Ladung bewirken soll. Der Einsauger *a* z. B. nimmt der vorderen Scheibe ihre negative Electricität, empfängt aber durch Influenz der hinteren noch einmal vor der vorderen Scheibe negative Electricität, wobei sie selber positiv electric wird, sodass er also diese Scheibe entladet und ihr zugleich eine neue Ladung gibt. Und ebenso verhält es sich mit den anderen Einsaugern auch. Durch die Verbindungsdrähte fliesst also jetzt gewisser-



Fig. 4.

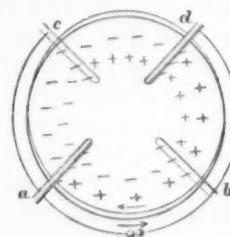


Fig. 5.

maassen ein zweifacher Strom, der Ladungsstrom und der Entladungsstrom, und so muss denn diese Form quantitativ doppelt so kräftig wirken, als die beiden ersten Formen. Ihre intensive Leistung ist etwas höher als die der ersten Form. Denn hört bei wachsender Funkenstrecke zwischen *c* und *d* der Ladungsstrom auf, so wirkt die Maschine mit geringerer Quantität noch weiter nach dem Schema von Fig. 3; hört aber auch der Entladungsstrom momentan auf, so wird sofort ihre Thätigkeit gestört, da an die Einsauger *a* und *b* nun verkehrte Electricitäten gelangen.

Fig. 5 entsteht, wenn die Verbindung *ab* fortgelassen, aber noch *a* mit *c* und *b* mit *d* verbunden wird. Es ist nämlich gleichgültig, wie man leicht sieht, ob die Electroden dann zwischen *c* und *d* bleiben, oder, wie in Fig. 5, zwischen *a* und *b* geschaltet werden. Der electrische Zustand der Scheiben bleibt

genau wie bei Fig. 4, wobei die Einsauger *a* und *c* gleichnamig electricisch werden, und ebenso die Einsauger *b* und *d*. In erstere fliesst aus doppelten Gründen negative, in letztere aus doppelten Gründen positive Electricität. Nach der getroffenen Verbindung muss die Maschine also quantitativ doppelt so stark wirken als die vorige, und viermal so stark als die erste Form. Intensiv aber muss sie der ersten Form gleich wirken, da mit Aufhören des Ladungstromes ihre Thätigkeit erloschen muss. Diese Form habe ich in meiner ersten Arbeit besonders hervorgehoben, habe aber bemerkt, dass ihre äussere Wirkung manchmal aufhört, wenn man nicht statt des einen Einsaugers einen Doppel-einsauger nimmt, und zwar, wie ich nachträglich p. 169 erwähnte, weil sich die Scheiben sonst zuweilen in zwei ent-

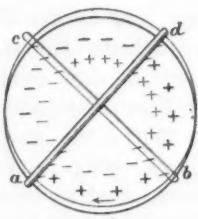


Fig. 6.

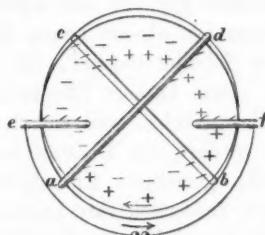


Fig. 7.

gegengesetzt electriche Zonen theilen. Ich will dies hier nicht weiter ausführen, sondern nur hinzufügen, dass auch die Form Fig. 4, wahrscheinlich aus gleichen Gründen, zuweilen ihre äussere Thätigkeit verliert.

Fig. 6 entsteht aus Fig. 4, wenn wir die Einsauger *a* und *d* und ebenso die Einsauger *b* und *c* verbunden und zugleich aus einem Stück verfertigt denken. Man hat solche Doppel-einsauger aus geraden oder gebogenen Stangen, die über das Centrum der Scheiben laufen, diametrale Conductoren genannt. Jeder Einsauger wirkt im übrigen wie in Fig. 4, d. h. er dient gleichzeitig zur Ladung und Entladung der Scheiben, nur dass die Doppelströme, welche dort durch die gebogenen Drähte flossen, hier die diametrale Conductoren durchlaufen müssen. Die Form, wie sie ist, gibt natürlich keine äusseren Wirkungen, mag sie innerlich auch noch so thätig sein, weil die Leitung

geschlossen bleibt. Ich führe sie auch nur auf als Uebergangsform zu der nächsten, welche dadurch verständlicher wird.

Fig. 7 gewinnt man sofort aus Fig. 6 durch Hinzufügung der Einsauger *e* und *f*, mit denen die Electroden communieren. Wie diese Einsauger wirken, ergiebt sich leicht aus folgender Betrachtung. Fig. 6 zeigt, dass zwischen *a* und *c* beide Scheiben negativ, und zwischen *b* und *d* beide Scheiben positiv electricisch sind, und zeigt zugleich, dass die Fortnahme dieser Electricitäten die Thätigkeit der Maschine nicht zerstören kann. Denn der Einsauger *a* wird die andere Scheibe nach wie vor positiv laden, weil die hintere an ihn herantretend noch immer negativ electricisch ist, und der Einsauger *b* wird die hintere nach wie vor negativ laden, weil die vordere an ihn herantretend noch immer positiv electricisch ist. Und dasselbe gilt von den Einsaugern *b*, *c* und *d*. Eine andere Frage ist, ob die neuen Einsauger, nur an der Vorderseite der Scheibe liegend, die hintere Scheibe mit entladen können. Dem äussern Effecte nach thun sie dies, wenigstens in der Hauptsache, weil sie viel mehr Electricität aufsaugen, als die vordere als Ladung mit sich führt, wie auch eine beiderseits geriebene Ebonitplatte durch einen einseitigen Einsauger äusserlich ihre Ladung verliert. Und so betrachtet stellt Fig. 7 zugleich den electricischen Zustand an der fraglichen Stelle der Scheiben dar. In Wirklichkeit verhält sich die Sache etwas anders. Die vordere verliert durch die Influenzwirkung der hinteren mehr, als sie selber als Ladung besass, sodass sie nicht unelectricisch, sondern umgeladen den fraglichen Einsauger verlässt. Wenn aber der äussere Effect so ist, als ob sich beide Scheiben entluden, so würde ein Doppel-einsauger, wie ihn einst Musaeus empfahl, ihn auch nicht vergrössern können. Ganz etwas Anderes wären zwei verbundene Einsauger, die im Sinne der Rotation gegen einander verschoben wären, wie sie gleichfalls Musaeus¹⁾ seinerzeit vorschlug, und wie sie kürzlich von Schaffers²⁾ aufs neue empfohlen sind. Betrachten wir die Form zunächst, wie sie die Figur zeigt, und wie ich sie im Jahre 1869 der

1) Musaeus, Pogg. Ann. 143. p. 285. 1871 und 146. p. 288. 1872.

2) Schaffers, Compt. rend. 24. sept. 1894.

Offentlichkeit übergab¹⁾), so sehen wir leicht ein, dass sie quantitativ mit der Form Fig. 4 etwa dasselbe leisten muss. Intensiv aber muss sie mehr leisten, nämlich soviel wie die Form Fig. 3, da bei beiden die Thätigkeit der Maschine ganz unabhängig von der Stellung der Electroden ist. Wenn man nun aber nach Musaeus die Einsauger *e* und *f* durch zwei Einsaugerpaare nach Art der Fig. 5 ersetzt, so mag die Maschine wohl quantitativ das leisten, wie Fig. 5, muss aber intensiv erheblich verloren haben.

Fig. 8 zeigt eine Form mit acht Einsaugern, deren jeder zugleich als Ladungs- und Entladungseinsauger wirkt, und die so verbunden sind, dass die ganze erregte Electricitätsmenge durch die Electroden fliesst. In die Einsauger *a*, *e*, *d* und *h* fliesst nämlich, wie man sieht, aus doppelten Gründen negative

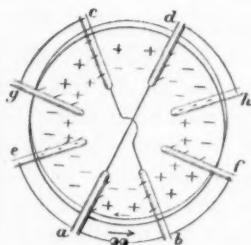


Fig. 8.

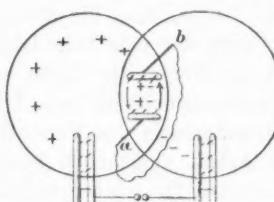


Fig. 9.

Electricität, und in die Einsauger *b*, *f*, *g* und *c* aus doppelten Gründen positive Electricität. Zur Verbindung dienen unter anderen zwei diametrale Drähte, deren einer in der Mitte eine Krümmung hat. Diese Form muss quantitativ das Achtfache der Fig. 2 oder das Vierfache der Fig. 4 oder Fig. 7 geben. Intensiv leistet sie aber noch weniger als Fig. 2 und stellt mit dem Aufhören des Entladungsstromes auch gleichzeitig ihre Thätigkeit ein. Sie hat noch den Uebelstand, dass zuweilen schon bei geringer Schlagweite wegen der früher gedachten Zonenbildung der Funkenstrom plötzlich erlischt. Ich habe die Form übrigens in der schon genannten Arbeit in Uppenborn's Centralblatt p. 684 aufgeführt.

1) W. Holtz, Pogg. Ann. 136. p. 171.

Fig. 9 endlich zeigt eine Einrichtung, in welcher die beiden Scheiben einander nur zur Hälfte decken. Diesem gedeckten Theile stehen zwei Einsauger gegenüber, welche einzlig zur Ladung der Scheiben dienen, während dort, wo sie sich nicht decken, je ein Doppeleinsauger zur Entladung der betreffenden Scheibe aufgestellt ist. Zwischen letzteren befinden sich die Electroden. Man möchte meinen, dass hier je ein einfacher Einsauger für die Entladung der Scheiben genügen müsste. So wäre es auch, wenn nur ihre Aussenseiten electricisch würden. Aber ihre Innenseiten werden es auch, weil die Rundung der einen für die andere gewissermaassen als Einsauger wirkt. Deshalb bleibt die Wirkung auch erheblich hinter Fig. 3 zurück, mit der diese Form sonst theoretisch die meiste Aehnlichkeit hat. Ich habe eine solche Maschine in meiner ersten Arbeit p. 137 flüchtig erwähnt.

Das Grundprincip des Verstärkungsprocesses.

Ich sagte, dass die electromotorische Thätigkeit sich erhalten, wenn nur jede neue Ladung stärker als die frühere sei. Man kann aber weiter fragen, unter welchen Bedingungen diese Voraussetzung möglich sei. Ich habe die Hauptbedingung oder das Grundprincip des Verstärkungsprocesses schon in meiner ersten Arbeit ausführlich besprochen und zwar für unbelegte Scheiben wie für solche, welche schmale Stanniolstreifen senkrecht zur Bewegungsrichtung haben. Stellen wir der geladenen Platte eines Condensators eine gleich grosse gegenüber, die wir ableitend mit dem Finger berühren, so wird die Dichte der so erzeugten Ladung zweifellos kleiner, als die der ersten sein. Bringen wir der ersten Platte aber ein kleines Kugelchen gegenüber und leiten es unter sonst gleichen Verhältnissen in gleicher Weise ab, so wird die Dichte seiner Ladung sehr wahrscheinlich grösser, als die Dichte der ersten sein. Oder allgemein, wenn eine geladene Fläche auf eine andere gleich grosse wirkt und so, dass sich diese auf einmal laden muss, so wird die Dichte der neuen Ladung allemal kleiner, als die Dichte der ersten sein. Aber wenn sie auf eine andere wirkt, die kleiner ist, oder so wirkt, dass sich diese nur allmäglich in gesonderten Theilen laden kann, so wird im allgemeinen die Dichte der neuen Ladung grösser, als die Dichte der ersten sein. Bei unserer Influenzmaschine handelt es sich

um den letzteren Fall. Hier geht beständig die Influenz von grösseren Flächen aus und wirkt auf Flächen, welche sich nur allmählich laden können, nämlich immer nur in jenem Radius, welcher momentan die Spitze des Einsaugers streift. Bei den meisten Formen der Maschine tritt indessen noch ein anderes Moment tritt für die Verstärkung ein.

Betrachten wir Fig. 10, so sehen wir, dass der vordere Streifen negativ electricisch dem Einsauger *a* gegenübertritt. Fehlte diese negative Electricität, so würde nach dem Früheren die neue Ladung voraussichtlich schon dichter, als die Ladung des hinteren Streifens werden. Jene negative Electricität aber begünstigt dies noch dadurch, dass sie ihrerseits schon aus der Ferne positive Electricität auf den Streifen zieht und zwar mehr als zur augenblicklichen Neutralisirung der unter dem Einsauger befindlichen Linse nöthig ist. So geschieht es auch, dass die Scheibe einer Reibzeugmaschine den abgeleiteten Einsauger des Conductors nicht unelectricisch verlässt, sondern vielmehr negativ electricisch, wovon sich jeder leicht überzeugen kann. Ich nannte diese Wirkung seinerzeit „Seitenanziehung“; Riess nannte sie später „Influenz einer electricischen Fläche auf sich selbst“.



Fig. 10.

Wenn nun trotz alledem der gewünschte Effect nicht immer eintritt, so liegt dies daran, dass wieder andere Factoren demselben entgegenwirken. So sind die Scheiben z. B. nicht immer isolirend genug, ich meine in circularer Richtung, denn nur um diese handelt es sich hier; und der Grund mag im Materiale der Scheiben liegen, oder darin, dass die Luftfeuchtigkeit sie leitend macht. Ferner stehen oft die Scheiben einander nicht so nahe, als sie können, oder die Einsauger den Scheiben nicht nahe genug. Oder die Einsauger haben zu wenig Spitzen, oder die Spitzen sind nicht genügend fein. Letztere Umstände erschweren den Uebergang der Electricität und tragen so zur Verringerung der Ladung bei. Eventuell wird jener so gross, dass schwache Electricitäten überhaupt gar nicht übergehen. Dann tritt der gewünschte Effect erst bei stärkerer Ladung des Erregers ein.

Fehlt der Uebergangswiderstand ganz, so tritt der Ver-

stärkungsprocess natürlich um so eher ein, und eventuell führt schon die schwächste electrische Einwirkung denselben herbei. Man erreicht dies, wenn man die Scheiben mit radialen Stanniolstreifen belegt und statt der Einsauger schleifende Federn benutzt, oder noch besser, wenn man die Einsauger behält und jedem ein Büschelchen anheftet, welches die Scheibe berührt. Ich veröffentlichte dies schon im Jahre 1881¹⁾ , und ich bemerke dies hier, weil zwei Jahre später Wimshurst²⁾ eine so ausgerüstete Maschine als seine Erfindung beschrieb. Die gedachten Metallbelege haben aber den Uebelstand, dass sie die Ausstrahlung begünstigen und so die quantitative und intensive Wirkung der Maschine schwächen. Auch begünstigen sie den Polwechsel, welcher daher röhrt, dass auch die Innenseiten der Scheiben electrisch werden und mit dieser Electricität wirken, wenn die Aussenseiten die ihrige momentan verloren haben. Nebenbei beeinträchtigen sie noch die Durchsichtigkeit der Maschine und erschweren so den Anblick der Lichterscheinungen, welche für das Studium der Theorie sonst eine wesentliche Hülfe sind.

Der Process der Selbsterregung.

Durch die Metallbelege der Scheiben und die schleifenden Büschel der Einsauger bewirken wir gleichzeitig, dass die Maschine sich selber erregt. Der Grund liegt darin, dass nun schon ein schwacher Anstoss den Verstärkungsprocess einleitet und dieser Anstoss durch die entstehende Reibungselectricität selber hervorgerufen wird. Die schleifenden Metallfäden streifen intermittirend die isolirenden Flächen, wobei diese die eine und jene die andere Electricität gewinnen und es wird niemals an allen Stellen die so erzeugte Electricität so völlig gleich sein, dass überall gleiche und entgegengesetzte Wirkungen vorhanden wären. So ist also eine Maschine mit Selbsterregung durchaus nichts Wunderbares oder Besonderes, und ihre Theorie ist keine andere, als die Theorie der gewöhnlichen Maschine. Im übrigen ist sie bequemer, aber dafür haften ihr auch alle Uebelstände an, welche ich eben an metallbelegten Scheiben getadelt habe.

1) W. Holtz, Uppenborn's Zeitschr. f. angewandt Elect. p. 199.

2) Wimshurst, Engineering 35. p. 4. 1883.

l führt
herbei.
radialen
leifende
sauger
scheibe
, und
urst²)
chrieb.
, dass
ve und
nstigen
Innen-
Electri-
an ver-
Durch-
ck der
e sonst

ifenden
ss die
ss nun
ss ein-
bungs-
Metall-
wobei
winnen
erzeugte
ne und
st also
nderen
andere,
gen ist
nde an,
abe.

14. Berichtigung zur Notiz des
Hrn. Schmidt¹⁾ über die elliptische Polarisation;
von P. Drude.

Da in der oben genannten Notiz eine factische Unrichtigkeit enthalten ist, so werde ich zur Berichtigung derselben gewungen.

Schmidt behauptet, ich hätte früher den Winkel $57^{\circ} 20'$ als Polarisationswinkel an Kalkspath-Spalt-Flächen anerkannt. — Meine Worte, auf welche sich Schmidt dabei bezieht, lauten²⁾: „Für das Azimuth $\omega = 0$ ist der Winkel, für welchen R_s verschwindet, identisch mit dem aus der Formel (2) berechneten $57^{\circ} 22'$, für andere Azimuthe ist die Berechnung unterblieben.“

Meine Beobachtungsreihe, welche nach Schmidt Aufälliges bieten soll, bezieht sich auf das Azimuth $\omega = 4^{\circ} 42'$. Sowohl die Rechnung, als die von mir angegebenen Werthe der Analysatorstellungen ergeben, dass für dieses Azimuth der Einfallswinkel, für welchen R_s verschwindet, grösser als $57^{\circ} 22'$ ist.

Daher enthalten meine Beobachtungen nicht die auffälligen Abweichungen unter einander, wie sie ihnen durch unrichtige Zusammenstellung von Schmidt gegeben sind.

Hinsichtlich der übrigen Ausführungen in der Notiz von Schmidt will ich nur noch bemerken, dass ein Streit über den Begriff des „Ellipticitätsgebietes“ nur durch die Unklarheit möglich wird, welche nach Schmidt diesem Begriffe anhaftet. Diese Unklarheit charakterisiert sich zur Genüge dadurch, dass Schmidt nach seiner ersten und seiner jetzigen Methode am Kalkspath dasselbe Ellipticitätsgebiet gefunden haben will, obwohl die neuen Zahlwerthe für die elliptische Polarisation halb so gross sind, wie die alten.

1) K. E. F. Schmidt, Wied. Ann. **53**. p. 769. 1894.

2) P. Drude, Wied. Ann. **38**. p. 283. 1889.

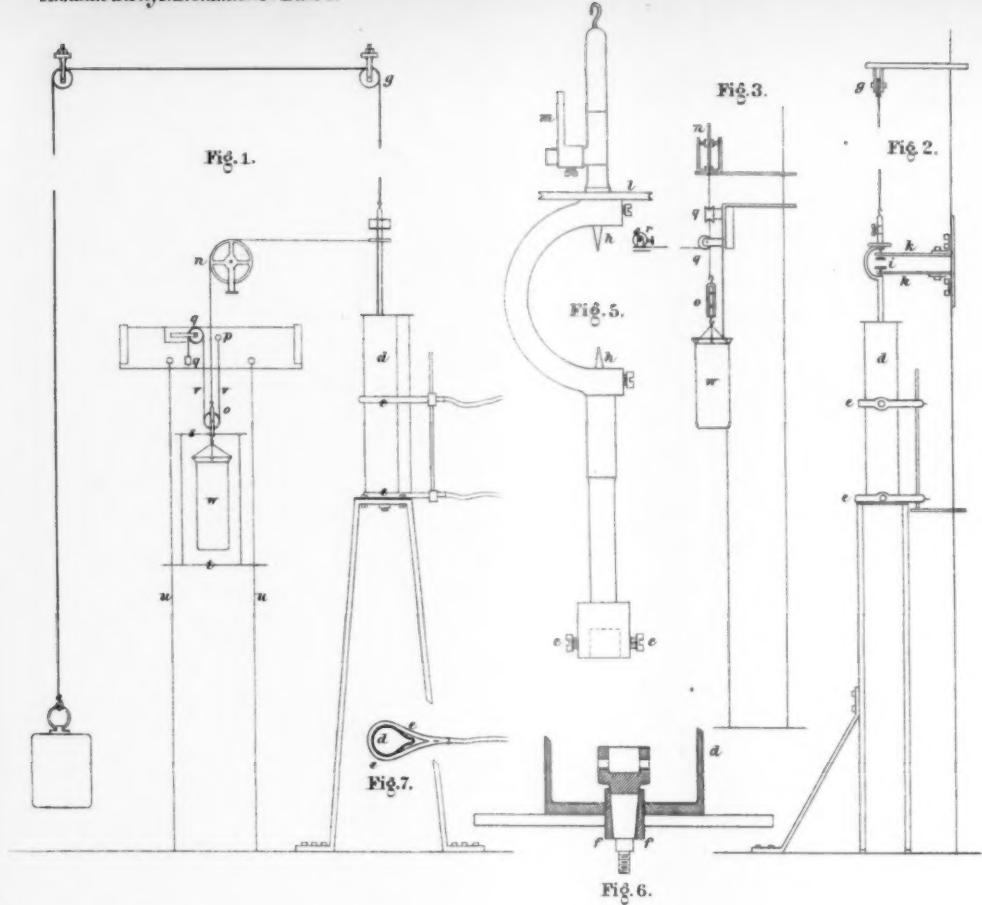
Schliesslich möchte ich noch einmal hervorheben, dass der von Schmidt beobachtete Wechsel des Vorzeichens der elliptischen Polarisation an polirten Gläsern bei einem vom Polarisationswinkel weit entfernten Einfallswinkel ein so merkwürdiges Resultat ist, dass es sich für alle Interessenten zur Nachprüfung empfehlen dürfte.

Dadurch könnte die Discussion dieser Fragen in ein neues Stadium treten. Bevor dieses nicht durch neue Beobachtungen herbei geführt wird, werde auch ich auf weitere Polemik verzichten.

Leipzig, November 1894.

ass der
er ellip-
Polari-
ürdiges
Nach-

n neues
ntungen
ik ver-



Stab N° 7. gesogen.

Torsion. T.
Detorsion. D.

Oreissen: Ausschläge. 1 m.m. = 50 Skalenteile.

Abscissen: Belastungen. 500 gr = 50 m.m.

Curven über Änderungen

Stab N° 15. gegossen.

Torsion. T
Detorsion. D

Oreissen: Ausschläge. 1 m.m. = 5 Skalenteile.

Abscissen: Belastungen. 500 gr = 50 m.m.

Stab N° 16. gegossen, langsam gekühlt.

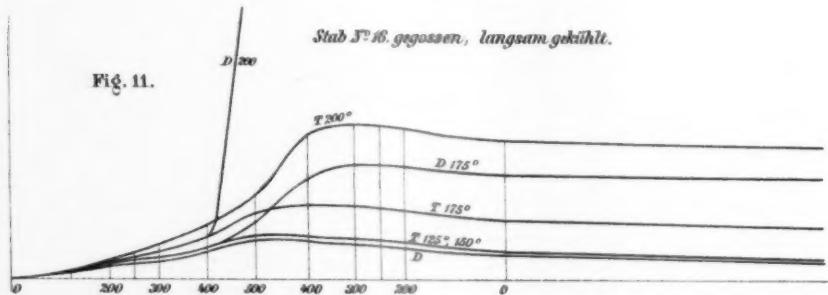


Fig. 4.

Fig. 11.

Stab N° 16. gegossen, langsam gekühlt.

E. Zin

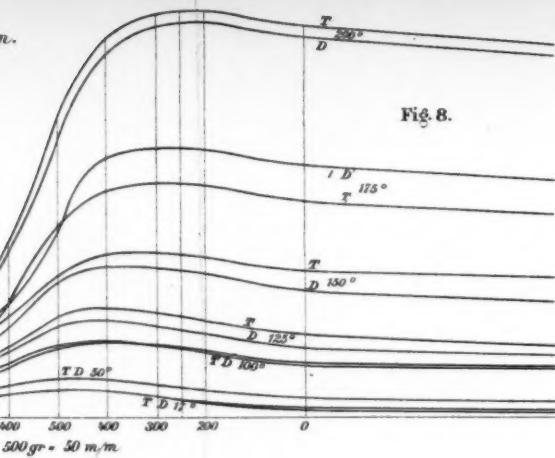


Fig. 8.

über Änderung der Torsion mit der Temperatur.

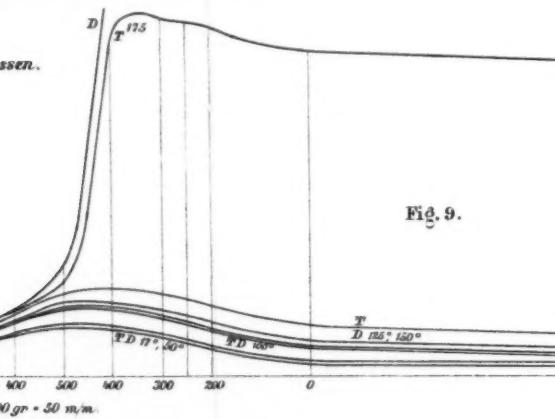


Fig. 9.

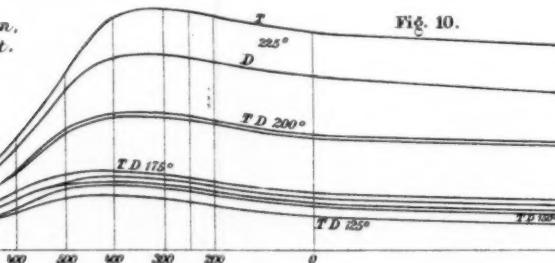


Fig. 10.

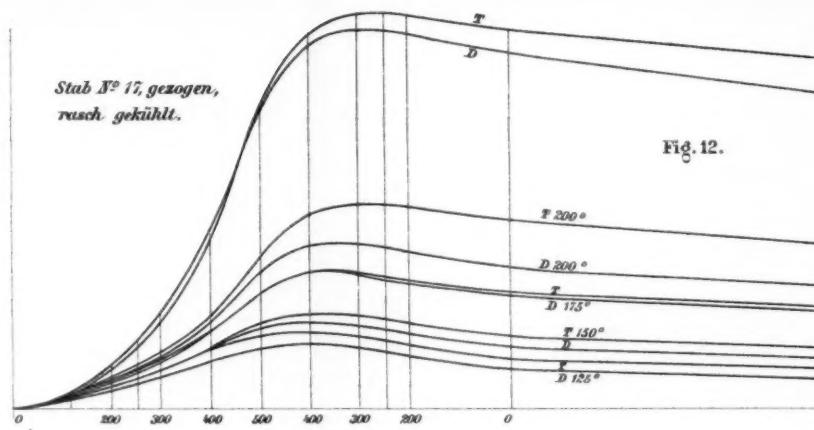


Fig. 12.

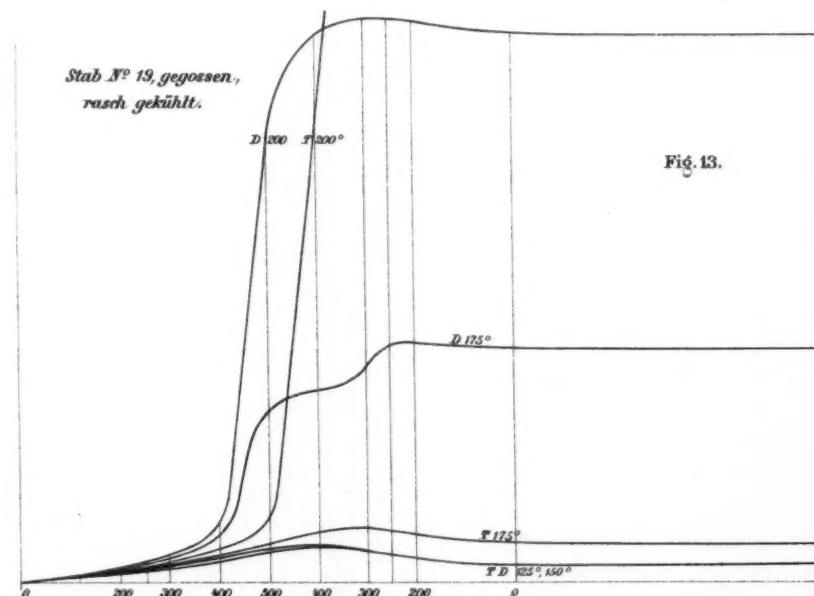


Fig. 13.